

层状复合材料周期结构的超声传播 频散特性及均匀化模拟

常新龙, 尼 涛, 艾春安, 刘 瑜

(第二炮兵工程学院, 西安 710025)

摘 要:首先采用改进全局矩阵算法,研究了层状复合材料周期结构的频散特性。当层数足够大时,在特定方向上结构表现出类似均匀各向异性材料的性质,可采用均匀化方法求解频散曲线。其次,给出了层状复合材料周期结构均匀化的计算方法,并研究了其适用范围。发现在低频段和高频高相速度段范围内可以采用等效模量计算频散特性;而高频低相速度范围内不能采用均匀化方法,该范围内波的性质有待进一步研究。

关键词:层状周期结构;复合材料;全局矩阵;等效模量

中图分类号: TG115. 28

文献标志码: A

文章编号: 1000-6656(2010)10-0780-05

Ultrasonic Dispersion and Structure Homogenization Simulation of Layered Periodic Structures Composites

CHANG Xin-Long, NI Tao, AI Chun-An, LIU Yu

(The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China)

Abstract: The dispersive property of layered periodic composites structure was researched by improved global matrix approach, firstly. It was found that the structure represented characterization of the homogenous anisotropic materials when the number of layer was large enough. Then the effective modules algorithm was developed and its applicability was discussed. The effective modules could be accepted in two ranges including the lower frequency band as well as the higher frequency and phase velocity band. However, the dispersive curves could not be calculated using effective modules in situation of higher frequency band with lower phase velocity below the longitudinal wave velocity, and the characterization of waves needed further investigation.

Keywords: Layered periodic structure; Composites; Global matrix; Effective modules

随着复合材料结构在航空航天领域应用的日益广泛,对复合材料的无损检测也变得更加重要。在各种检测技术中,超声波检测是复合材料无损检测的一种重要方法。超声波在复合材料中传播时,与材料内部结构发生复杂的相互作用,复合材料内部的任何缺陷都会影响最终的结果。因此作为理论基础,必须首先研究复合材料结构中超声波的传播特性。

复合材料结构通常由一定数量的单向复合材料纤维板按照周期性角度层合而成。由于纤维尺寸相

对于结构尺寸要小得多,因此可将单向复合材料纤维板看作是宏观各向异性均匀材料,而复合材料结构就可以认为是宏观层状各向异性周期结构。对于这一结构中超声波传播特性有许多学者进行过研究^[1-8],发展了传递矩阵法、全局矩阵法和递归矩阵法等多种方法,这些方法各有其优缺点。随着研究对象层数增加,无论使用何种方法,其计算的困难度和所耗时间都大为增加,因此层状复合材料周期结构的均匀化就成为研究的方向之一。Datta^[3]和Lee^[4]等做了关键性的工作,从理论上推导了等效模量的计算方法。笔者针对这一问题,进一步进行深入的研究,分析随层数增加,层状各向异性周期结构频散特性的演化规律,确定等效模量的适用范围。

收稿日期: 2009-10-13

作者简介: 常新龙(1965—),男,教授,博士生导师,研究方向为火箭发动机失效物理与可靠性,复合材料无损检测。

1 层状复合材料周期结构频散特性

1.1 超声波传播理论模型

研究层状结构中超声波的传播特性,有两种重要理论:传递矩阵方法和全局矩阵方法。传递矩阵法由 Thomson 和 Haskell 提出^[1-2],其优点是矩阵阶数不依赖层数,在计算上具有巨大的优势,但是对于大频厚积问题,传递矩阵变成病态矩阵,频散方程解出现不稳定。针对这一问题,许多学者进行了改进,其中递归矩阵法可以较好地解决这一问题^[6]。全局矩阵法由 Knopoff 提出^[2],通过同时满足所有界面上的边界条件,得到单一矩阵方程,相应解可以给出所有层中波的性质。全局矩阵法的缺点是层数增多时矩阵维数成几何增长,计算量巨大,但该方法可以消除传递矩阵中出现的数值不稳定问题。针对笔者研究的层状结构,需计算的频厚积范围较大,故采用全局矩阵方法。

层状周期对称结构由单向复合材料层合而成,为讨论方便,以 $0^\circ/90^\circ$ 正交周期铺层对称结构为研究对象,结构示意图及坐标系定义如图 1 所示。在线弹性范围内,对于任意单层介质,声场的位移 u 可由其内六个子波线性叠加表示。由于材料在 x_2 方向无限延伸,质点位移分量与 x_2 无关。

$$(u_1, u_2, u_3) = \sum_{q=1}^6 (1, V_q, W_q) U_{1q} \cdot \exp[i\xi(x_1 + \alpha_q x_3 - ct)] \quad (1)$$

式中 $V_q = U_{2q}/U_{1q}$, $W_q = U_{3q}/U_{1q}$; U_{1q}, U_{2q}, U_{3q} 分别为 x_1, x_2, x_3 方向上第 q 个子波的位移分量, U_{11}, U_{13}, U_{15} 表示三个“下行波”, U_{12}, U_{14}, U_{16} 表示三个“上行波”; ξ 为 x_1 方向的波矢量; α_q 为第 q 个子波波矢量的 x_3 分量与 x_1 分量的比值; c 为沿 x_1 方向的相速度。

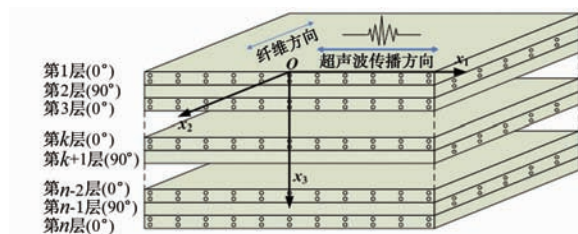


图1 层状复合材料周期对称结构及全局坐标系定义

应力分量同样可以写作子波叠加的形式:

$$(\sigma_{33}^*, \sigma_{13}^*, \sigma_{23}^*) = \sum_{q=1}^6 (D_{1q}, D_{2q}, D_{3q}) U_{1q} \cdot \exp[i\xi(x_1 + \alpha_q x_3 - ct)] \quad (2)$$

式中 $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}/i\xi$; D_{1q}, D_{2q}, D_{3q} 分别为 x_1, x_2, x_3 方向上应力分量与 U_{1q} 的比值。

将位移和应力分量用矩阵形式表示:

$$P_k = D_k A_k \quad (3)$$

$$\text{式中 } P_k = [u_1, u_2, u_3, \sigma_{33}^*, \sigma_{13}^*, \sigma_{23}^*]^T \quad (4)$$

$$A_k = [U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{15}, U_{16}]^T \quad (5)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \\ V_1 E_1 & V_1 E_2 & V_3 E_3 & V_3 E_4 & V_5 E_5 & V_5 E_6 \\ W_1 E_1 & -W_1 E_2 & W_3 E_3 & -W_3 E_4 & W_5 E_5 & -W_5 E_6 \\ D_{11} E_1 & D_{11} E_2 & D_{13} E_3 & D_{13} E_4 & D_{15} E_5 & D_{15} E_6 \\ D_{21} E_1 & -D_{21} E_2 & D_{23} E_3 & -D_{23} E_4 & D_{25} E_5 & -D_{25} E_6 \\ D_{31} E_1 & -D_{31} E_2 & D_{33} E_3 & -D_{33} E_4 & D_{35} E_5 & -D_{35} E_6 \end{bmatrix} \quad (6)$$

层与层之间的界面为刚性连接,对于第 k 层和 $k+1$ 层之间的界面,位移和应力满足连续性条件:

$$[D_{kk} - D_{(k+1)k}] \begin{bmatrix} A_k \\ A_{k+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

然后建立每层结构各子波的局部坐标系,原点设在各子波“进入”该层的位置处,如图 2 所示。这样,三个“下行波”的原点在该层顶部,而三个“上行波”的原点在该层底部。对局部坐标系的修改非常重要,保证了各层上下表面子波指数部分相等,并且向各自相对的表面方向递减。事实证明,这种局部坐标系的设置对于排除高频振荡非常有效。修改后单层顶部 D_t 和底部 D_b 的方阵 D 分别为:

$$D_t = \begin{bmatrix} 1 & 1/E_2 & 1 & 1/E_4 & 1 & 1/E_6 \\ V_1 & V_1/E_2 & V_3 & V_3/E_4 & V_5 & V_5/E_6 \\ W_1 & -W_1/E_2 & W_3 & -W_3/E_4 & W_5 & -W_5/E_6 \\ D_{11} & D_{11}/E_2 & D_{13} & D_{13}/E_4 & D_{15} & D_{15}/E_6 \\ D_{21} & -D_{21}/E_2 & D_{23} & -D_{23}/E_4 & -D_{25} & -D_{25}/E_6 \\ D_{31} & -D_{31}/E_2 & D_{33} & -D_{33}/E_4 & -D_{35} & -D_{35}/E_6 \end{bmatrix}$$

$$D_b = \begin{bmatrix} E_1 & 1 & E_3 & 1 & E_5 & 1 \\ V_1 E_1 & V_1 & V_3 E_3 & V_3 & V_5 E_5 & V_5 \\ W_1 E_1 & -W_1 & W_3 E_3 & -W_3 & W_5 E_5 & -W_5 \\ D_{11} E_1 & D_{11} & D_{13} E_3 & D_{13} & D_{15} E_5 & D_{15} \\ D_{21} E_1 & -D_{21} & D_{23} E_3 & -D_{23} & D_{25} E_5 & -D_{25} \\ D_{31} E_1 & -D_{31} & D_{33} E_3 & -D_{33} & D_{35} E_5 & -D_{35} \end{bmatrix} \quad (8)$$

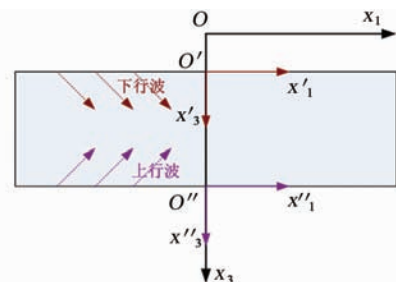


图2 复合材料单向板中局部坐标系定义

将各层中的式(7)写出,对于一个 n 层结构,可写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} D_{1b} & -D_{2t} & & & \\ & D_{2b} & -D_{3t} & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & D_{n-2b} & -D_{n-1t} \\ & & & & D_{n-1b} & -D_{nt} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ \dots \\ A_{n-1} \\ A_n \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

加入边界条件,根据上下表面的位移应力的情况,对第1层和第 n 层的 D 矩阵进行处理,最终形式为:

$$\begin{bmatrix} D_{1t} & & & & \\ D_{1b} & -D_{2t} & & & \\ & D_{2b} & -D_{3t} & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & D_{n-2b} & -D_{n-1t} \\ & & & & D_{n-1b} & -D_{nt} \\ & & & & & D_{nb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ \dots \\ A_{n-1} \\ A_n \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

为使式(10)有意义,系数矩阵 D 必须为奇异矩阵,其行列式为零,从而得到其特征方程如式(11)所示。对于上下表面自由应力的情况,所得即为Lamb频散方程。

$$|D| = 0 \quad (11)$$

1.2 算例

以S-2玻璃/环氧树脂复合材料为计算对象,其单层结构工程常数如表1所示^[4]。求解3~35层正交对称层合板沿 x_1 方向的频散曲线,计算范围为频率0~3 MHz,相速度1~8 km/s,结果如图3和4所示,图中SH波未画出。观察3层结构和7层结构频散模态,如图3所示,可以看出两者差异显著,7

表1 S-2玻璃/环氧树脂单层结构材料常数

参数	取值	参数	取值
E_1/GPa	56.41	ν_{12}	0.242
E_2/GPa	19.2	ν_{23}	0.38
G_{12}/GPa	8.89	$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	2.023
G_{23}/GPa	6.96	层厚/mm	0.5

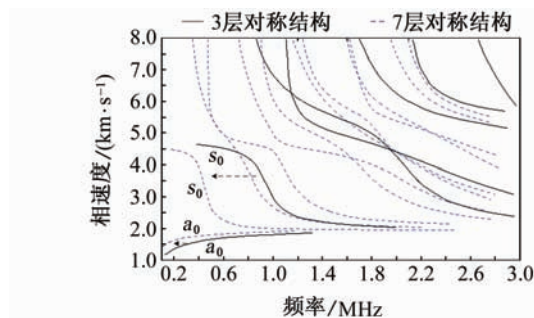


图3 3层周期对称结构和7层周期对称结构频散曲线对比

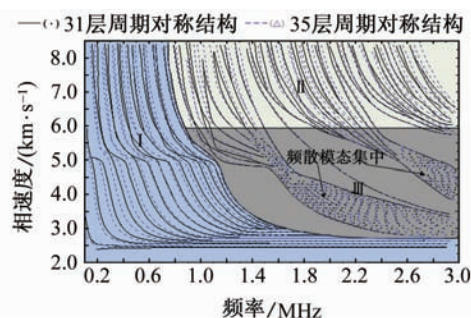


图4 31层周期对称结构和35层周期对称结构频散曲线对比

层结构模态数量相比3层结构有大幅增加;同时频散曲线向低频方向移动的现象明显,阶数越高,移动量越大。但当层数 ≥ 31 层后,如图4所示,频散曲线整体分布逐渐趋于稳定。模态数量虽同步增加,但增加数量较少;频散曲线向低频方向移动的趋势也越来越趋向缓慢。

研究发现,对于采用的S-2玻璃/环氧树脂复合材料板,相速度频散图可根据频率和相速度范围大体划分为三部分,如图4所示。频率0~1.5 MHz的区域为I部分,频散曲线趋于稳定,层数增加并未显著改变曲线的形状和位置,频率1.5~3 MHz并且相速度 >5.45 km/s的区域为II部分,随层数增加,模态数量同步增加,频散曲线逐渐向低频方向移动,但并不会进入I区域。频率1.5~3 MHz而且相速度 <5.45 km/s的区域为III部分,该部分频散曲线集中在两个区域,且不随层数增加而变化,区域内频散模态集中,对层数较多的情况,不能有效区分频散模态。I, II, III部分的分界线只与频率和相速度有关,而与频厚积无关。

以上现象暗示,随着层数增加厚度变大,复合材料板在特定方向表现出类似各向同性材料的声学特性,这就为复合材料均匀化提供了数值结果的保证。

2 层状复合材料周期结构均匀化

2.1 均匀化方法

如上所述,随着层数增加,计算层状复合材料结构精确频散曲线的计算量和所耗时间呈几何速度增长,这无疑为后续分析增加了困难。而对层状复合材料结构频散特性随层数增加的演化规律研究后发现,在容许范围内,当层数足够大时,可以采用均匀各向异性材料的频散曲线进行评估,这即是层状复合材料周期结构的均匀化问题。

从宏观角度出发,遵循应力和位移均匀化原

则^[9-13],针对复合材料层合板结构特点,可推导出层状各向异性复合材料板的均匀化方法。由于复合材料结构在 x_2 方向上无限延伸,可以假设面内应变和离面应力与厚度方向 x_2 相独立,得到:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_i \rangle &= \langle Q_{ij} \rangle \epsilon_j + \langle T_{iB} \rangle \sigma_B \\ \langle \epsilon_A \rangle &= \langle C_{AB}^{-1} \rangle \sigma_B - \langle T_{jA} \rangle \epsilon_j\end{aligned}\quad (12)$$

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad (13)$$

$$T_{iB} = C_{iA}C_{AB}^{-1} \quad (14)$$

式中 Q_{ij} 为面内刚度分量;下标 i, j 代表 1, 2, 6; A, B 代表 3, 4, 5; 符号“ $\langle \rangle$ ”表示沿厚度方向的平均, 如:

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i dz。$$

将式(12)改写为有效刚度形式为:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_i \rangle &= \bar{C}_{ij} \epsilon_j + \bar{C}_{iB} \langle \epsilon_B \rangle \\ \sigma_A &= \bar{C}_{Aj} \epsilon_j + \bar{C}_{AB} \langle \epsilon_B \rangle\end{aligned}\quad (15)$$

式中: $\bar{C}_{ij} = \langle Q_{ij} \rangle + \langle T_{iA} \rangle \langle C_{AB}^{-1} \rangle^{-1} \langle T_{jB} \rangle$

$$\bar{C}_{iB} = \bar{C}_{Bj} = \langle T_{iA} \rangle \langle C_{AB}^{-1} \rangle^{-1}$$

$$\bar{C}_{AB} = \langle C_{AB}^{-1} \rangle^{-1}$$

将式(13), (14)代入式(15), 即可计算相应条件下的等效刚度矩阵系数。针对 $0^\circ/90^\circ$ 正交周期结构, 式(15)可简化为:

$$\begin{aligned}\bar{C}_{11} = \bar{C}_{12} &= \frac{1}{2}(C_{11} + C_{33}) - \frac{(C_{13} - C_{23})^2}{4C_{33}}, \\ \bar{C}_{12} &= C_{12} + \frac{(C_{13} - C_{23})^2}{4C_{33}},\end{aligned}\quad (16)$$

$$\bar{C}_{33} = C_{33}, \bar{C}_{44} = \bar{C}_{55} = \frac{2C_{44}C_{55}}{C_{44} + C_{55}}, \bar{C}_{66} = C_{66}$$

故对于 S-2 玻璃/环氧树脂层状周期结构, 其等效模量如表 2 所示。

表 2 层状复合材料周期对称结构等效刚度矩阵系数

参数	取值	参数	取值
\bar{C}_{11}	41.869 0	\bar{C}_{33}	23.504 4
\bar{C}_{12}	8.035 8	\bar{C}_{44}	7.807 5
\bar{C}_{13}	8.800 3	\bar{C}_{55}	7.807 5
\bar{C}_{22}	41.869 0	\bar{C}_{66}	8.890 0
\bar{C}_{23}	8.800 3		

2.2 计算结果

按照等效正交各向异性均匀材料模量计算不同厚度下的频散曲线, 如图 5~7 所示。对于层数较少的情况, 如图 5 和 6 所示, 可以发现, 按等效模量求得的 a_0 和 s_0 模态的频散曲线与实际结果吻合较好, 而高阶模态则有较大出入。随着层数增加, 可以吻合的模态数量同步增多。这一现象可以用相应模

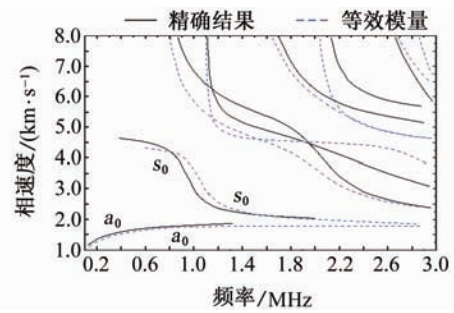


图 5 3 层对称周期结构精确频散曲线与等效模量频散曲线对比

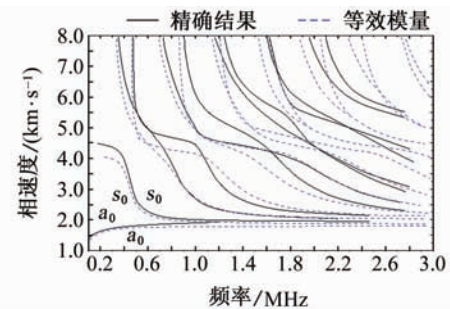


图 6 7 层对称周期结构精确频散曲线与等效模量频散曲线对比

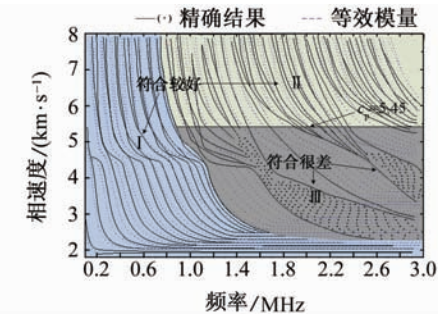


图 7 31 层对称周期结构精确频散曲线与等效模量频散曲线对比

态波长解释。对于低阶模态, 其波长较大, 远大于单层厚度, 故可产生类似均匀材料的 Lamb 波模态。而层数越多, 结构几何尺寸影响越小, 产生与均匀材料类似的模态数量也就越多。

层数为 31 层情况如图 7 所示。同上所述, 将相速度频散图划分为三个部分。研究发现, 随着层数增加, 频厚积增大, 第 I 部分频散模态与等效模量所得结果符合得很好。当层数 ≥ 31 后, 此频段内频散曲线的计算可以用等效模量代替。对于第 II 部分, 等效模量计算得出的结果与实际曲线符合得较好。精确计算所得频散曲线与等效模量计算所得频散曲线有一定差异, 但仍可以在一定程度上使用等效均匀各向异性材料的频散曲线替代精确频散曲线。但

对于第Ⅲ部分,明显看出两种方法计算结果存在较大差异,不能通过均匀各向异性材料频散曲线预测精确频散曲线的形态和分布,故第Ⅲ部分不适用层状各向异性周期结构的均匀化方法。

进一步分析可得,在纤维方向上,纵波声速为 $\sqrt{C_{11}/\rho}=5.45 \text{ km/s}$,与Ⅱ,Ⅲ部分分界线相一致。故对于高频段,在相速度大于相应方向纵波速度的区域内适用均匀化方法;而低于纵波波速的区域内则不适用均匀化方法。

3 结论

以正交 S-2 玻璃/环氧树脂周期对称结构为研究对象,采用改进全局矩阵算法,分析了频散特性随层数增加的演变规律,给出了等效模量的计算方法,并对等效模量的适用范围进行了进一步讨论。得到如下结论:

(1) 层数较少时,频散曲线随层数增加变化显著。层数增多,模态数量增加,频散曲线整体向低频方向移动,但曲线变化趋势并无明显改变。

(2) 层数 ≥ 31 后,频散曲线趋于稳定。研究发现,相速度频散图可分为三部分。Ⅰ部分频散模态稳定,层数增加不显著改变曲线的形状和位置。Ⅱ部分模态数量随层数同步增加,频散曲线向低频移动但不进入Ⅰ区域。Ⅲ部分频散曲线集中于两个区域,且不随层数增加变化,区域内频散模态集中,在大层数情况下不能有效区分模态。

(3) 理论和数值结果都表明,在一定范围内,层状周期结构频散特性可以采用等效模态计算。但等效模量计算方法只适用于Ⅰ部分和Ⅱ部分,而不适用Ⅲ部分。Ⅲ部分区域内波的性质有待进一步研究。

参考文献:

- [1] 罗斯 J L, 著. 固体中的超声波[M]. 何存富, 吴斌, 王秀彦, 译. 北京: 科学出版社, 2004.
- [2] 张海燕, 他得安, 刘镇清. 层状各向异性复合板中的兰

(上接第 779 页)

considerations in vibrothermography[C]// Burleigh D D, Cramer K E, Peacock G R. Thermosense XXVI. Orlando, FL, USA: SPIE, 2004: 332—335.

- [2] 杨小林, 谢小荣, 江涛, 等. 疲劳裂纹的振动红外热成像检测[J]. 激光与红外, 2007, 37(5): 442—444.
- [3] Rothenfusser M, Homma C. Acoustic thermography: vibrational modes of cracks and the mechanism of heat

姆波[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

- [3] Karunasena W, Shah A H, Datta S K. Wave propagation in a multilayered laminated cross-ply composite plate[J]. Journal of Applied Mechanics, 1991, 58(10): 1028—1032.
- [4] Lee J. Plate waves in multi-directional composite laminates[J]. Composite Structures, 1999, 46(4): 289—297.
- [5] Wang L, Rokhlin S I. Floquet wave homogenization of periodic anisotropic media[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2002, 112(1): 38—45.
- [6] Rokhlin S I, Wang L. Stable recursive algorithm for elastic wave propagation in layered anisotropic media: stiffness matrix method[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2002, 112(3): 822—834.
- [7] Rokhlin S I, Wang L. Ultrasonic waves in layered anisotropic media: characterization of multidirectional composites[J]. Solids and Structures, 2002, 39(9): 5529—5545.
- [8] Liu G R, Tani J, Watanabe K, et al. Lamb wave propagation in anisotropic laminates[J]. Journal of Applied Mechanics, 1990, 57(6): 923—929.
- [9] Michel J C, Moulinec H, Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, 172(2): 109—143.
- [10] Cohen I, Bergman D J. Effective elastic properties of periodic composite medium[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2003, 51(9): 1433—1457.
- [11] Pastukhova S E. Homogenization of elasticity problems on periodic composite structures[J]. Sbornic: Mathematics, 2005, 196(7): 1033—1073.
- [12] 曹礼群, 崔俊芝. 复合材料拟周期结构的均匀化方法[J]. 计算数学, 1999, 21(3): 331—344.
- [13] 胡更开, 郑泉水, 黄筑平. 复合材料有效弹性性质分析方法[J]. 力学进展, 2001, 31(3): 361—392.

generation[C]// Thompson D O, Chimenti D E. Review of progress in quantitative nondestructive evaluation. Golden, Colorado (USA): AIP, 2005: 624.

- [4] Carslaw H S, Jaeger J C. Conduction of Heat in Solids (2nd edition) [M]. Oxford: Clarendon Press, 1959: 263—264.
- [5] 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 132—136.