

# 三层平板导体厚度及电导率的涡流检测

任芳芳,雷银照

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院,北京 100191)

**摘要:**为一次性检测出三层不导磁平板导体的各层厚度及各层电导率,利用电磁场理论建立了正问题求解模型,推导了三层不导磁平板导体上方空心圆柱线圈的散射场阻抗表达式,试验验证了该表达式的正确性;建立了反问题求解模型,使用最优化算法计算了反问题的解,根据一组不同激励频率点的线圈散射场阻抗测量值,计算出了三层不导磁平板导体的各层厚度及各层电导率。试验结果表明,反演结果可靠。

**关键词:**厚度;电导率;多层平板导体;反演;涡流检测

中图分类号:TG115.28

文献标志码:A

文章编号:1000-6656(2013)08-0050-04

## Thickness and Conductivity Measurement of Three-Layered Plane Conductors Based on Harmonic Eddy Current Testing

REN Fang-Fang, LEI Yin-Zhao

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** For the purpose of measuring thickness and conductivity of all the layers of three-layered plane conductors at one time, a forward problem model was built. In the model, analytic solution of an air-core cylindrical coil's impedance caused by eddy current in three-layered plane conductors was presented. Calculated results based on the presented analytic solution agreed well with the experiment results. After this, an inverse problem was put forward. The ultimate goal was to calculate the thickness and conductivity of all the layers of three-layered plane conductors when the probe impedance caused by eddy current at several frequency points was acquired. Combined with the analytic expressions, optimization algorithm was employed to solve the inverse problem. Inversion results for the three-layered plane conductors showed that the proposed method was practicable and the accuracy was good.

**Keywords:** Thickness; Conductivity; Stratified plane conductors; Inversion; Eddy current testing

不导磁的层状平板导体常见于航空、航天设备中,以多层金属复合板、多层平板导电涂层为其典型结构。为确保功用的充分发挥,多层平板导体在诸多参数上均有要求,其厚度及电导率不仅能够指示多层平板导体的磨损、老化、腐蚀程度,亦能反映多层导体内部的物理、化学变化,因而需要有效的检测技术来检测这些参数。

采用涡流检测法对多层不导磁平板导体进行无损检测,具有精度高、速度快、操作简单、成本低廉等

优势。其正问题的求解模型可归结为多层平板导体上方线圈阻抗解析表达式的计算。目前已发表的文献中,多层平板导体上方空心圆柱线圈<sup>[1-3]</sup>、椭圆线圈<sup>[4]</sup>的阻抗计算方法均已给出,对表达式中各部分的数值计算方法亦有所探讨<sup>[5-6]</sup>。反问题的求解可采用最优化算法。文献[7]提出了一种基于解析法的检测金属电导率的新方法,对金属电导率实现了高精度测量;文献[8]对金属近表面电导率分布情况进行了初步反演;文献[9]针对三层平板导体在已知厚度时反推电导率,或已知电导率时反推厚度;文献[10]有效反演出了飞机发动机叶片表层涂层厚度、中间涂层厚度及电导率。

目前尚未见到可一次性检测出三层平板导体中所有分层厚度及电导率的研究结果。笔者探索一种

收稿日期:2012-09-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50777002)

作者简介:任芳芳(1988—),女,硕士研究生,主要从事电磁无损检测方法与技术研究工作。

可一次性对三层平板导体所有分层厚度及电导率同时检测的方法,利用电磁场理论建立正问题求解模型,导出了三层不导磁无限大平板导体上方空心圆柱线圈的散射场阻抗表达式,并将阻抗计算结果与试验结果进行比较;同时,建立反问题求解模型,使用最优化算法计算反问题的解,反问题计算值与实际值对比,吻合良好。

## 1 正问题求解及试验验证

### 1.1 正问题求解

如图1所示,三层不导磁无限大平板导体上方置有一空心圆柱线圈。其中,三层平板导体底层厚度为 $h_2$ ,电导率为 $\sigma_2$ ;中层厚度为 $h_3$ ,电导率为 $\sigma_3$ ;上层厚度为 $h_4$ ,电导率为 $\sigma_4$ ;空心圆柱线圈的内半径为 $R_1$ ,外半径为 $R_2$ ,高度为 $D$ ,端部距离为 $H$ 。现从空心圆柱线圈中任取一匝圆环线圈,其上面的任一点 $P$ 坐标为( $P', \varphi, z$ ),并将无限大空间划分为6个场区,各场区内的周向磁矢位 $A_\varphi$ 满足以下边界条件。

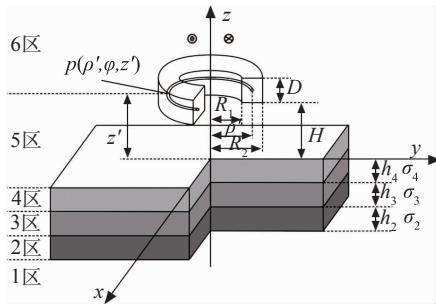


图1 三层平板导体涡流问题的求解模型

#### ① 约束方程:

$$\nabla^2 A_\varphi + \left(k_i^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) A_\varphi = 0 \quad (1)$$

式中: $i$ 为1,2,3,4,5,6; $k_1^2, k_2^2, k_3^2, k_4^2, k_5^2, k_6^2$ 分别为 $0, -j\omega\mu_0\sigma_2, -j\omega\mu_0\sigma_3, -j\omega\mu_0\sigma_4, 0, 0$ ; $\mu_0$ 为真空磁导率。

#### ② 内边界上的边界条件:

$$\lim_{z \rightarrow -h_2-h_3-h_4} A_{\varphi 1} = \lim_{z \rightarrow -h_2-h_3-h_4} A_{\varphi 2} \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow -h_2-h_3-h_4} \frac{\partial A_{\varphi 1}}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow -h_2-h_3-h_4} \frac{\partial A_{\varphi 2}}{\partial z} \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow -h_3-h_4} A_{\varphi 2} = \lim_{z \rightarrow -h_3-h_4} A_{\varphi 3} \quad (4)$$

$$\lim_{z \rightarrow -h_3-h_4} \frac{\partial A_{\varphi 2}}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow -h_3-h_4} \frac{\partial A_{\varphi 3}}{\partial z} \quad (5)$$

$$\lim_{z \rightarrow -h_4} A_{\varphi 3} = \lim_{z \rightarrow -h_4} A_{\varphi 4} \quad (6)$$

$$\lim_{z \rightarrow -h_4} \frac{\partial A_{\varphi 3}}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow -h_4} \frac{\partial A_{\varphi 4}}{\partial z} \quad (7)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} A_{\varphi 4} = \lim_{z \rightarrow 0} A_{\varphi 5} \quad (8)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial A_{\varphi 4}}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial A_{\varphi 5}}{\partial z} \quad (9)$$

$$\lim_{z \rightarrow z' \rightarrow 0} A_{\varphi 5} = \lim_{z \rightarrow z' \rightarrow 0} A_{\varphi 6} \quad (10)$$

$$\lim_{z \rightarrow z' \rightarrow 0} \frac{\partial A_{\varphi 5}}{\partial z} - \lim_{z \rightarrow z' \rightarrow 0} \frac{\partial A_{\varphi 6}}{\partial z} = \mu_0 I_0 (\rho - \rho') \quad (11)$$

式中: $z$ 和 $\rho$ 均为柱坐标系中的坐标

③ 无限远条件:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A_{\varphi i} = 0 (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (12)$$

利用分离变量法求解约束方程(1),并结合第一类一阶贝塞尔函数 $J_1(\lambda\rho)$ 性质及边界条件(2)~(12)解得<sup>[2]</sup>

$$A_5 = \frac{1}{2} \mu_0 I_0' \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) J_1(\lambda\rho') (e^{\lambda z} + \alpha e^{-\lambda z}) e^{-\lambda z'} d\lambda \quad (13)$$

$$A_6 = \frac{1}{2} \mu_0 I_0' \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) J_1(\lambda\rho') (e^{\lambda z'} + \alpha e^{-\lambda z'}) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (14)$$

式中: $\lambda$ 是引入的一个参数。

其中:

$$\alpha = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8},$$

$$a_1 = (\lambda - u_4) (u_2 + \lambda)$$

$$(u_3 + u_2) (u_4 + u_3) e^{2u_4 h_4 + 2u_3 h_3 + 2u_2 h_2},$$

$$a_2 = (\lambda - u_4) (u_2 - \lambda) (u_3 - u_2) (u_4 + u_3) e^{2u_4 h_4 + 2u_3 h_3},$$

$$a_3 = (\lambda - u_4) (u_2 + \lambda) (u_3 - u_2) (u_4 - u_3) e^{2u_4 h_4 + 2u_2 h_2},$$

$$a_4 = (\lambda + u_4) (u_2 + \lambda) (u_3 + u_2) (u_4 - u_3) e^{2u_3 h_3 + 2u_2 h_2},$$

$$a_5 = (\lambda - u_4) (u_2 - \lambda) (u_3 + u_2) (u_4 - u_3) e^{2u_4 h_4},$$

$$a_6 = (\lambda + u_4) (u_2 - \lambda) (u_3 - u_2) (u_4 - u_3) e^{2u_3 h_3},$$

$$a_7 = (\lambda + u_4) (u_2 + \lambda) (u_3 - u_2) (u_4 + u_3) e^{2u_2 h_2},$$

$$a_8 = (\lambda + u_4) (u_2 - \lambda) (u_3 + u_2) (u_4 + u_3),$$

$$b_1 = (\lambda + u_4) (u_2 + \lambda)$$

$$(u_3 + u_2) (u_4 + u_3) e^{2u_4 h_4 + 2u_3 h_3 + 2u_2 h_2},$$

$$b_2 = (\lambda + u_4) (u_2 - \lambda) (u_3 - u_2) (u_4 + u_3) e^{2u_4 h_4 + 2u_3 h_3},$$

$$b_3 = (\lambda + u_4) (u_2 + \lambda) (u_3 - u_2) (u_4 - u_3) e^{2u_4 h_4 + 2u_2 h_2},$$

$$b_4 = (\lambda - u_4) (u_2 + \lambda) (u_3 + u_2) (u_4 - u_3) e^{2u_3 h_3 + 2u_2 h_2},$$

$$b_5 = (\lambda + u_4) (u_2 - \lambda) (u_3 + u_2) (u_4 - u_3) e^{2u_4 h_4},$$

$$b_6 = (\lambda - u_4) (u_2 - \lambda) (u_3 - u_2) (u_4 - u_3) e^{2u_3 h_3},$$

$$b_7 = (\lambda - u_4) (u_2 + \lambda) (u_3 - u_2) (u_4 + u_3) e^{2u_2 h_2},$$

$$b_8 = (\lambda - u_4) (u_2 - \lambda) (u_3 + u_2) (u_4 + u_3),$$

$$u_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}, u_3 = \sqrt{\lambda^2 - k_3^2}, u_4 = \sqrt{\lambda^2 - k_4^2}.$$

在空心圆柱线圈的横截面内任选一点 $P$ ,则点

$P$  所在圆环线圈平面将空心圆柱线圈分为上下两部分,仿照文献[2]中的方法将  $I$  替换为:

$$dI = J_c d\rho' dz'$$

式中:  $I$  为电流强度;  $J_c$  为电流密度。

$$\text{令 } U(R_1, R_2, \lambda) = \frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda R_1}^{\lambda R_2} t J_1(t) dt \quad (t \text{ 为引入的}$$

一个参数),利用叠加原理可求出点  $P$  处的矢量磁位为:

$$A_{5-6} = \frac{1}{2} \mu_0 J_c \int_0^\infty U(R_1, R_2, \lambda) J_1(\lambda \rho) [2 - e^{-\lambda(z-H)} - e^{-\lambda(H+D-z)} + \alpha e^{-\lambda z} + \alpha e^{-\lambda(z+H)} (1 - \alpha e^{-\lambda D})] d\lambda \quad (15)$$

其中  $H < z < H + D$ 。进一步,根据文献[2]中给出的空心圆柱线圈两端的阻抗公式:

$$Z = j\omega \pi \mu_0 n_c^2 \int_0^\infty U^2(R_1, R_2, \lambda) [2(\lambda D + e^{-\lambda D} - 1) + \alpha(1 - e^{-\lambda D})^2 e^{-2\lambda H}] d\lambda \quad (16)$$

可得空心圆柱线圈的散射场阻抗(导体中的涡流单独作用时在线圈两端产生的阻抗)为:

$$Z_{ec} = j\omega \pi \mu_0 n_c^2 \int_0^\infty \alpha U^2(R_1, R_2, \lambda) (1 - e^{-\lambda D})^2 e^{-2\lambda H} d\lambda \quad (17)$$

式中:  $\alpha$  为导体尺寸及电磁参数的函数。

## 1.2 正问题试验验证

为验证散射场阻抗表达式(17)的正确性,进行了如下试验。绕制空心圆柱线圈用作检测探头,线圈匝数 43 圈,内半径  $R_1$  为 9.95 mm,外半径  $R_2$  为 10.20 mm,高度  $D$  为 3.62 mm,提离  $H$  为 1.20 mm。取 2.0 mm 厚铜板,1.04 mm 空气层和 3.44 mm 厚铝板依次叠置(各层板面积不小于 20 cm×20 cm),用以模拟 3 层导电不导磁平板结构。

使用游标卡尺测量各层金属板厚度(多次测量后取平均值),使用 D60k 型数字金属电导率测量仪测量各层金属板电导率(可测量厚度大于 1.5 mm 的单层金属板的电导率,测量误差小于 1%)。

将线圈参数及 3 层平板结构各分层厚度及电导率值代入散射场阻抗表达式(17),求得散射场阻抗计算值,并与使用阻抗分析仪测量所得的测量值对比,比较结果见图 2。可见,散射场阻抗计算值与测量值吻合良好。

## 2 反问题计算与试验验证

### 2.1 反问题计算

设  $\sigma_2, h_2$  为三层平板导体底层电导率和厚度,  $\sigma_3, h_3$  为中层电导率和厚度,  $\sigma_4, h_4$  为上层电导率和

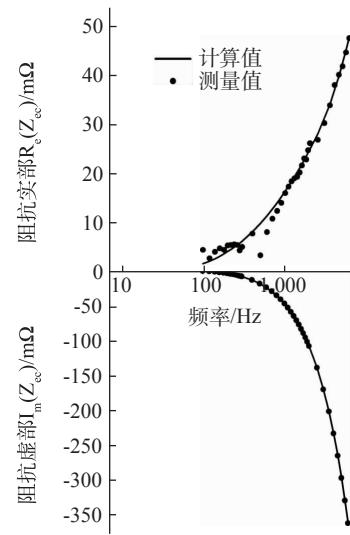


图 2 空心圆柱线圈散射场阻抗计算值与测量值的对比  
厚度,  $\sigma_{\max}$  为待求电导率最大值,  $h_{\max}$  为待求厚度最大值。取待测参数的向量为:

$$Y = [\sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4]^T$$

建立最优化问题如下:

$$\text{ming}(Y) = \sum_{i=1}^N |\Delta Z_{f_i}^{(*)} - \Delta Z_{f_i}^{(k)}(Y)|^2 \quad (18)$$

其中  $k=1, 2, \dots, n$ ; 约束条件为:

$$\begin{cases} 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_{\max} \\ 0 \leq \sigma_3 \leq \sigma_{\max} \\ 0 \leq \sigma_4 \leq \sigma_{\max} \\ 0 < h_2 \leq h_{\max} \\ 0 < h_3 \leq h_{\max} \\ 0 < h_4 \leq h_{\max} \end{cases} \quad (19)$$

设  $k$  为迭代次数,  $i$  为频率点数,  $\Delta Z_{f_i}^{(*)}$  为频率  $f_i$  处的散射场阻抗测量值,  $\Delta Z_{f_i}^{(k)}(Y)$  为频率  $f_i$  处的第  $k$  次散射场阻抗计算值。测量不同频率  $f_i$  下线圈的散射场阻抗值  $\Delta Z_{f_i}$ , 设待测参数初值为:

$$Y^{(0)} = [\sigma_2^{(0)} \quad \sigma_3^{(0)} \quad \sigma_4^{(0)} \quad h_2^{(0)} \quad h_3^{(0)} \quad h_4^{(0)}]^T \quad (20)$$

利用最优化算法<sup>[11]</sup>调整待测参数,使散射场阻抗计算值  $\Delta Z_{f_i}^{(k)}(Y)$  逐渐逼近散射场阻抗测量值  $\Delta Z_{f_i}^{(*)}$ , 当计算精度达到设定要求时,认为此时对应的参数值:

$$Y^{(k)} = [\sigma_2^{(k)} \quad \sigma_3^{(k)} \quad \sigma_4^{(k)} \quad h_2^{(k)} \quad h_3^{(k)} \quad h_4^{(k)}]^T \quad (21)$$

即为待测参数的反演值:

$$Y^* = [\sigma_2^* \quad \sigma_3^* \quad \sigma_4^* \quad h_2^* \quad h_3^* \quad h_4^*]^T \quad (22)$$

### 2.2 试验验证

为验证上述反问题的计算模型,用 1.2 节正问

题试验验证部分的试验数据,将各频率点处的散射场阻抗试验值虚部代入反演计算程序进行计算,所得反演结果如表1所示。

表1 反演结果

待求参数	反演值	测量值	差值
底 层 厚度 $h_2/\text{mm}$	3.552 5	3.440 0	0.112 5
电导率 $\sigma_2/(\text{MS} \cdot \text{m}^{-1})$	32.525	34.450	-1.925
中 层 厚度 $h_3/\text{mm}$	1.113 1	1.040 0	0.073 1
电导率 $\sigma_3/(\text{MS} \cdot \text{m}^{-1})$	$23.2 \times 10^{-6}$	0.000 0	-
上 层 厚度 $h_4/\text{mm}$	1.992 3	2.000 0	0.007 7
电导率 $\sigma_4/(\text{MS} \cdot \text{m}^{-1})$	54.133	54.550	0.417

注:相对误差=|测量值-反演值|/|测量值|

结果表明,使用上述反问题计算模型,可以在已知若干频率点的空心圆柱线圈散射场阻抗后,一次性计算出三层平板导体所有分层厚度及电导率。

### 3 结论

建立了三层平板导体电磁场正问题求解模型,计算导体上方空心圆柱线圈的散射场阻抗,计算值与测量值吻合良好;由激励频率范围内若干频率点处线圈散射场阻抗测量值,利用最优化方法,可一次性计算出三层导电不导磁平板结构所有分层厚度及电导率,反演结果与实际值吻合良好。

### 参考文献:

- [1] DODD C V, DEEDS W E. Analytical Solutions to Eddy-Current Probe-Coil Problems [J]. Journal of Applied Physics, 1968, 39(60): 2829-2838.

(上接第 21 页)

综上所述,采用横波探头从堆焊层侧进行超声检测时,由于堆焊层的影响,会在固定深度位置出现变形波信号,影响缺陷分析。但是根据这种伪缺陷显示信号的特征,是可以区分和判断的。

### 5 结论

由于不锈钢堆焊层特殊的声学特性,当从堆焊层侧进行超声检测时,不锈钢堆焊层对超声检测存在一定程度的影响。采用下列三种方式,可有效克服不锈钢堆焊层对超声检测的影响。

(1) 采用与被检工件相似的堆焊工艺和表面状况的对比试块,以克服不锈钢堆焊层对检测灵敏度

- [2] 雷银照. 时谐电磁场解析方法[M]. 北京:科学出版社, 2001: 178-217.
- [3] YONG LI, Theodoros Theodoulidis, GUI Yun Tian. Magnetic Field-Based Eddy-Current Modeling for Multilayered Specimens [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2007, 43(11): 4010-4015.
- [4] LENNART B. Determination of Thickness of Silver Coatings on Brass by Measuring the Impedance of a Thin Elliptic Coil [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2007, 56(3): 790-799.
- [5] 雷银照,马信山. 涡流线圈的阻抗计算[J]. 电工技术学报, 1996, 11(1): 17-20.
- [6] 范孟豹,黄平捷,叶波等. 多层导电结构电涡流检测探头阻抗解析模型及数值计算[J]. 机械工程学报, 2009, 45(6): 50-54.
- [7] 王新掌,雷银照. 一种检测金属电导率的新方法[J]. 郑州工业大学学报, 2001, 22(2): 62-63.
- [8] EROL U, JOHN C M, JAMES H R. Experimental determination of the near-surface conductivity profiles of metals from electromagnetic induction (eddy current) measurements [J]. Inverse Problems, 1994, 10: 753-764.
- [9] JOHN R B, STEPHEN J N. Eddy current inversion for layered conductors [J]. Research in Nondestructive Evaluation, 1992, 4: 205-219.
- [10] YONG LI, ZHEN Mao CHEN, YING MAO, et al. Quantitative evaluation of thermal barrier coating based on eddy current technique [J]. NDT&E International, 2012, 50: 1-7.
- [11] 陈宝林. 最优化理论与算法(第2版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 232-258.

的影响。

(2) 采用笔者提到的方法二和方法三可用于探头折射角测量;45°探头对反射体定位偏差在土2 mm内;当60°探头发现较深的缺陷时,需要用45°探头进行核实。

(3) 通过伪缺陷的深度位置计算核实,以及采用多种探头核实和被检工件表面状况观察等方法,可有效剔除堆焊层引起的伪缺陷信号。

### 参考文献:

- [1] 李家伟,陈积懋. 无损检测手册[M]. 北京:机械工业出版社, 2002.