

一种求解兰姆波特征方程的方法

倪园¹, 程建政², 张德俊¹

(1. 中国科学院 武汉物理与数学研究所, 武汉 430071; 2. 武汉科技学院, 武汉 430073)

摘要:给出了兰姆波的原始特征方程式, 以相速度为自变量, 求解兰姆波特征方程。通过 Matlab 软件对求解过程进行编程, 绘制出兰姆波在钢板中传播的频散曲线, 以此作为进行无损检测的重要依据。

关键词:兰姆波; 特征方程; 频散曲线; 相速度

中图分类号: TG115.28

文献标识码: A

文章编号: 1000-6656(2008)08-0498-03

A Method of Calculation for Lamb Wave Characteristic Equation

NI Yuan¹, CHENG Jian-Zheng², ZHANG De-Jun¹

(1. Wuhan Institute of Physics and Mathematics, the Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China;

2. Wuhan University of Science and Engineering, Wuhan 430073, China)

Abstract: Lamb wave characteristic equation was given. In order to find the zero point of Lamb wave characteristic equation, the phase velocity was be treated as the independently variable. The algorithm was realized with Matlab, and the frequency dispersion curves of Lamb wave propagating in steel were plotted. It is of significance for practical application of Lamb waves in engineering.

Keywords: Lamb wave; Characteristic equation; Dispersion curves; Phase velocity

用超声体波(纵波和横波)检测薄板时会遇到盲区问题, 因而薄板的检测是超声兰姆波的应用领域。然而, 由于兰姆波的多模式及频散特性, 使其在激励、传播、接收以及信号处理等方面较为复杂, 要想更有效地应用兰姆波, 必须首先解决兰姆波频散曲线的绘制问题。

1 兰姆波特征方程

板中的兰姆波是一种在厚度与激励声波波长为相同数量级的声波导中由纵波和横波合成的特殊形式应力波。根据质点振动的特点, 分为对称模式和反对称模式, 每种模式兰姆波又有不同的阶次。兰姆波特征方程是在板的上、下自由界面处法向应力和切向应力均为零的条件下, 解波动方程而得出的。

其原始特征方程为^[1]:

对称模式

$$(k^2 + s^2)^2 \cosh(qd) \sinh(sd) - 4k^2 qs \sinh(qd) \cosh(sd) = 0 \quad (1)$$

反对称模式

$$(k^2 + s^2)^2 \sinh(qd) \cosh(sd) - 4k^2 qs \cosh(qd) \sinh(sd) = 0 \quad (2)$$

式中 k ——沿水平方向传播的波数;

d ——1/2 板厚;

$$q = \sqrt{k^2 - k_1^2};$$

$$s = \sqrt{k^2 - k_s^2};$$

k_1, k_s ——分别为板中纵波和横波的波数。

两个超越方程决定了兰姆波是多模式, 且每种模式的相速度 c_p 与频率-板厚乘积 fd 是非线性关系, 同时这个复杂的特征方程也决定了兰姆波在激励、传播以及处理接收信号等方面十分复杂。

2 特征方程的计算

下述为对称模式兰姆波特征方程的数值解方

收稿日期: 2007-10-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10574144, 10774164)

作者简介: 倪园(1982—), 女, 硕士研究生, 研究方向为超声检测与信号处理。

法。反对称模式求解方法与此相同,在此不赘述。

2.1 方程分析

由相速度 $c_p = \omega/k$ 可知, c_p 取不同的值, ω ($\omega = 2\pi f$) 和 k 也相应有不同值,且一个 c_p 值可对应多个 ω 和 k , 所得曲线不止一条,这也证明了兰姆波是多模式。令:

$$y = (k^2 + s^2)^2 \cosh(qd) \sinh(sd) - 4k^2 qs \sinh(qd) \cosh(sd) \quad (3)$$

当 $0 < c_p \leq c_s$ 时

$$y = (k^2 + s^2)^2 \cosh(qd) \sinh(sd) - 4k^2 qs \sinh(qd) \cosh(sd) \quad (4)$$

当 $c_s < c_p \leq c_1$ 时

$$y = (k^2 - \text{abs}^2(s))^2 \cosh(qd) \sin(\text{abs}(s)d) - 4k^2 q \text{abs}(s) \sinh(qd) \cos(\text{abs}(s)d) \quad (5)$$

当 $c_1 < c_p$ 时

$$y = (k^2 - \text{abs}^2(s))^2 \cos(\text{abs}(q)d) \sin(\text{abs}(s)d) + 4k^2 \text{abs}(q) \text{abs}(s) \sin(\text{abs}(q)d) \cos(\text{abs}(s)d) \quad (6)$$

上述条件中, c_s 和 c_1 分别为板材中传播的横波速度和纵波速度。因 c_p 取值区间不同,式(3)有三种不同的表达形式。由式(4)~(6)可以看出,若以 ω 或 k 为自变量时,对 c_p 的求解较为复杂;而以 c_p 为自变量时,对 ω 或 k 的求解就相对简单,因此数值计算时以 c_p 为自变量。

2.2 数值计算

笔者用 Matlab 软件对兰姆波特征方程进行了计算。图 1 为主程序框图,在主程序中,通过函数值传递,将 c_{p1} 和 c_{p2} 带入子程序 1 中,子程序 1 为根据式(4)~(6)计算 c_{p1} 和 c_{p2} 所对应的 y_1 和 y_2 值,并将 y_1 和 y_2 值返回到主程序中。通过判断 y_1 和 y_2 乘积与零的大小关系,计算出零值点并保存数据。若 y_1 和 y_2 乘积小于零,转入子程序 2,采用二分法^[2]计算 c_{p1} 和 c_{p2} 之间的零值点,最后记录所有点的数据并绘制曲线。

根据式(2)的分析,在解超越方程的过程中,若在能满足曲线精度的条件下,设定一个近似零点门限和计算零值点循环次数的上限,可减少程序运行时间且能达到精度要求。在子程序 2 中,若用二分法计算零值点时循环次数在所设定上限值内,且所得 y 值在近似零点门限内即可认为该点是零值点。这样既保证了精度,又提高了运算效率。计算结果表明,该两项适当取值可较准确地绘制出兰姆波相速度频散曲线。

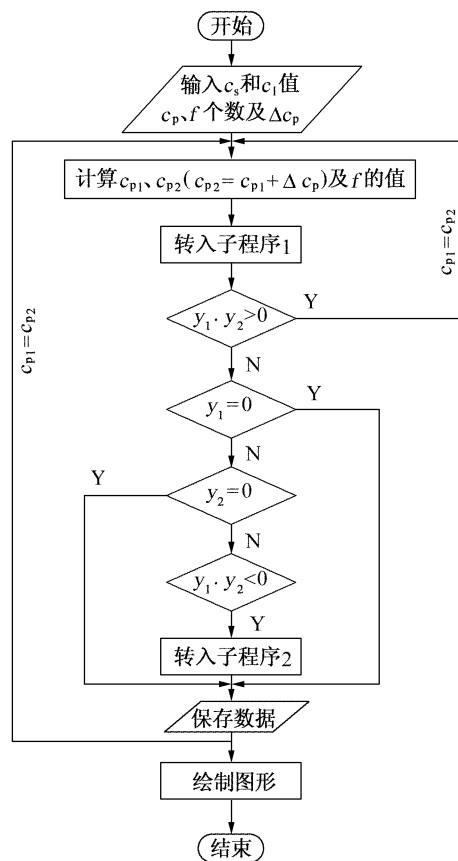


图 1 主程序框图

3 算法比较及计算结果

笔者所述计算方法,从兰姆波原始特征方程出发,未经变形处理,无任何限制条件。因方程中所包含的 $\cos, \cosh, \sin, \sinh$ 取值范围为 $(-\infty, +\infty)$, 所以在式(2)中,自变量的取值只需考虑实际物理意义,且在实际意义范围内无间断点。

笔者曾分别参照文献[3,4]所述方法计算了兰姆波特征方程。文献[3]是将式(1)和(2)作变形处理,得到含 $\tan$ 和 $\tanh$ 函数的分式形式超越方程,其对称模式为:

$$\frac{\tan(k_s b)}{\tan(k_1 b)} = -\frac{4k_0^2 k_1 k_s}{(k_0^2 - k_s^2)^2} \quad (7)$$

反对称模式为:

$$\frac{\tan(k_s b)}{\tan(k_1 b)} = -\frac{(k_0^2 - k_s^2)^2}{4k_0^2 k_1 k_s} \quad (8)$$

$$k_1^2 = \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 - k_0^2 \quad k_s^2 = \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 - k_0^2$$

式中 k_0 为沿板水平方向的波数, b 为 1/2 板厚。根据 c_p 的取值区间不同,可将对称模式分别表示为: 当 $0 < c_p \leq c_s$ 时

$$\frac{\tanh \frac{\omega b \sqrt{c_s^2 - c_p^2}}{c_p c_s}}{\tanh \frac{\omega b \sqrt{c_1^2 - c_p^2}}{c_p c_1}} = \frac{4c_s^3 \sqrt{(c_1^2 - c_p^2)(c_s^2 - c_p^2)}}{c_1(2c_s^2 - c_p^2)^2} \quad (9)$$

当 $c_s < c_p \leq c_1$ 时,

$$\frac{\tan \frac{\omega b \sqrt{c_p^2 - c_s^2}}{c_p c_s}}{\tanh \frac{\omega b \sqrt{c_1^2 - c_p^2}}{c_p c_1}} = \frac{4c_s^3 \sqrt{(c_1^2 - c_p^2)(c_p^2 - c_s^2)}}{c_1(2c_s^2 - c_p^2)^2} \quad (10)$$

当 $c_1 < c_p$ 时

$$\frac{\tan \frac{\omega b \sqrt{c_p^2 - c_s^2}}{c_p c_s}}{\tan \frac{\omega b \sqrt{c_p^2 - c_1^2}}{c_p c_1}} = -\frac{4c_s^3 \sqrt{(c_p^2 - c_1^2)(c_p^2 - c_s^2)}}{c_1(2c_s^2 - c_p^2)^2} \quad (11)$$

以 c_p 为自变量,由式(9)~(11)解超越方程零值点,用文献[3,4]所述方法可绘出相速度频散曲线。文献[3,4]所述方法也是将式(1)和(2)作代换得到一超越方程,因 c_p 取值不同,方程系数也不同,对方程中 $\tan$ 和 $\tanh$ 函数的取值区间进行分析并编程求解计算。文献[3,4]所述方法计算特征方程的时间与程序中各变量步长取值大小有关,在满足曲线精度的条件下,笔者用文献[3,4]所述方法计算的时间分别是 33.50 和 25.15 s。

与上述方法比较,文献[3,4]所述方法虽简化了原始特征方程,但增加了方程所应满足的限制条件。特别是有 $\tan$ 和 $\tanh$ 函数存在,使得在作数值计算之前必须花大量时间分析间断点。若不仔细考虑,疏忽一个间断点就会造成所绘制的频散曲线缺少一种模式。此方法是将每种模式的数据点归为一个数组再逐一绘制,程序运行时间较长。而笔者所述方法简单易行,从原始特征方程出发,不考虑限制条件,程序框图层次分明,适合工程技术人员使用。通过主程序调用两个子程序,精度控制较好,程序运算时间为 6.23 s,计算速度明显较文献[3,4]所述方法快。但该方法的弊端是绘制曲线时未将每一模式的数据点归在一个数组里,因此绘制出的图形是离散点。可通过程序将某一距离内的点进行归类。当采

用钢的参数 $c_s=3\,200$ m/s, $c_1=5\,790$ m/s 计算频散曲线时,用笔者所述方法绘制点图为图 2 所示。

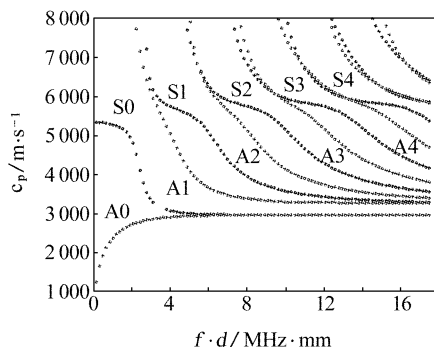


图 2 钢的相速度频散曲线点图

通过计算相速度频散曲线,根据 $\alpha = \arcsin(c_1/c_p)$,易计算出激励角- fd 曲线。而由群速度 $c_g = d\omega/dk$ 也可计算出 c_g - fd 曲线,在此不赘述。以上各频散曲线绘制的长短和光滑程序与程序中所取 c_p 的步长、零值点的门限、计算零值点循环次数上限设置有关。

4 结语

笔者通过对兰姆波特征方程的分析,提出以兰姆波相速度为自变量来计算零值点以求超越方程的根,因原始特征方程中的函数无间断点,使笔者编制的程序运行时间大大减少。另外,该方法可通过减小 c_p 和 $f \cdot d$ 的步长,更进一步提高精度。实际计算表明,上述解法较文献[3,4]的频散曲线计算方法更简便准确,运算时间更短。绘出的频散曲线图可作为兰姆波无损检测的重要参考依据。

参考文献:

- [1] 杜功焕,朱哲民,龚秀芬. 声学基础[M]. 南京:南京大学出版社,2001.
- [2] 邓建中,刘之行. 计算方法[M]. 西安:西安交通大学出版社,2001.
- [3] 郑祥明,赵玉珍,史耀武. 兰姆波频散曲线的计算[J]. 无损检测,2003,25(2):153—154.
- [4] 艾春安,李 剑. 兰姆波频率方程的数值解法[J]. 无损检测,2005,27(6):294—296.

欢迎网上投稿 欢迎订阅 欢迎刊登广告