

DOI: 10.11973/wsje202002013

# 一种管道中的导波频散计算方法

文立超, 张应红, 刘文龙, 张奥申

(桂林电子科技大学 机电工程学院, 桂林 541004)

**摘要:** 为了求得管道中导波的频散特性, 提出了一种基于有限元的模式分析法来求解频散关系。以导波理论为基础, 构建了 Navier-stokes 方程, 采用分离变量法得到 Helmholtz 方程及泛函形式, 并利用 COMSOL 软件对 Helmholtz 方程进行特征值的求解, 计算结果与半解析有限元法所求得的结果基本吻合, 并且能够求解出环状模态, 证明了该方法的有效性及其求解的全面性。同时, 运用导波理论及铁木辛柯梁理论对低频的频散关系进行理论求解, 通过对比, 验证了模式分析法的精度良好。最后通过位移分量分析了模态的特征, 为管道导波无损检测提供了依据。

**关键词:** 管道; 导波检测; 频散; 有限元; 模式分析

中图分类号: O347; TG115.28

文献标志码: A

文章编号: 1000-6656(2020)02-0056-05

## A method for calculating the dispersion of guided waves in pipe

WEN Lichao, ZHANG Yinghong, LIU Wenlong, ZHANG Aoshen

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

**Abstract:** A finite element based mode analysis method is proposed to solve the dispersion relations. Based on the guided wave theory, the Navier stokes equation is constructed. The Helmholtz equation and functional form are obtained by using the variable separation method and solved by the finite element method. The calculated results are basically consistent with the results obtained by the semi-analytical finite element method, and the ring modal can be gotten, which proves the effectiveness and comprehensiveness of this method. At the same time, the guided wave theory and the Timoshenko Beam theory are applied to theoretically solve the dispersion relations of low frequency, which shows the characteristics of the modal analysis method are superior. Finally, the modal characteristics are analyzed by the displacement component, which provides a basis for the mode selection of guided wave on nondestructive testing.

**Key words:** pipe; guided wave testing; dispersion; finite element; mode analysis

基于导波的无损检测方法具有传播速度快、方向性好、应用范围广等特性。但是由于导波具有多模态、易频散的特性, 其频率的选择及频散往往会影响到检测结果的准确性, 因而研究管道中导波的频散

关系对于导波检测的应用具有重要意义。

英国帝国理工大学的 LOWE 等<sup>[2-3]</sup>研究了充水埋地钢管的频散曲线及衰减特性, 并基于解析法开发了频散曲线软件 Disperse; SECO<sup>[4]</sup>在此方法基础上通过 MATLAB 软件开发了 PC disp 工具箱, 该工具箱可用于分析管状导波的频散及传播情况。北京工业大学的何存富<sup>[5]</sup>采用矩阵法对立柱埋地部分和未埋地部分的频散特性进行了研究。近年来半解析有限元方法在频散分析方面得到了广泛应用。其中, 具有代表性的有: BOCCHINI<sup>[6]</sup>基于半解析有限元法开发了 GUWGUI 软件, 可用于各种复杂截面的导波频散关系的求解; 浙江大学的胡剑虹<sup>[7]</sup>等对半解析有限元法的求解矩阵规模进行了改进, 减

收稿日期: 2019-03-11

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51465012, 51405225); 广西制造系统与先进制造技术重点实验室主任课题(17-259-05-005Z, 17-259-05-007Z); 桂林电子科技大学研究生创新项目(2017YJXC11)

**作者简介:** 文立超(1993—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为超声波检测, email: wlwc@qq.com

**通信作者:** 张应红(1978—), 男, 高级工程师, 硕士生导师, 主要研究方向为无损检测, zyh1433@sina.com

少了计算量;海军工程大学的王悦民<sup>[8-9]</sup>采用有限元的特征频率法求解了管道的频散曲线,该方法建立了三维模型,求解自由度大,需从可视化的角度统计周期数及模态数,进而求得频散关系,但操作繁琐。笔者提出一种基于有限元的模式分析法,通过推导导波传播的波动方程,采用分离变量法得到亥姆霍兹方程,并用有限元法求得特征值解,从理论上证明了模式分析法的可行性。利用 COMSOL Multiphysics 软件建立了二维管道截面的有限元模型。根据低频下的导波频散关系特点,进一步采用弹性波理论及铁木辛柯梁理论对模式分析方法及半解析有限元法的求解结果进行验证,最后对位移分量进行坐标变换及波结构特征分析。该方法与传统半解析有限元法相比,需要设置模式阶数,在有限元软件中可以方便地得到频散关系,为导波的频散计算分析提供了一种新的思路。

## 1 理论基础

假定管道材料为各向同性、均匀同质的线弹性体,内外径分别为  $a, b$ , 不考虑体力及惯性力的影响时,其一般的弹性动力学方程(Navier-stokes 方程)如式(1)所示。

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{u}$  为时间谐振位移矢量; $\rho$  为材料密度; $\lambda$  和  $\mu$  为材料的拉梅常量。

位移场通过亥姆霍兹分解可表示为标量  $\varphi$  的梯度和矢量  $\mathbf{H}$  的旋度,即

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)中可得

$$\begin{aligned} & \nabla \left[ (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] + \\ & \nabla \times \left[ \mu \nabla^2 \mathbf{H} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

若要使式(3)成立,需要满足下列关系式

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

由式(4)分析可得此方程为两个形式一致的波动方程,而纵波波速  $c_L$  可表示为

$$c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (5)$$

横波波速  $c_T$  为

$$c_T = \sqrt{\mu/\rho} \quad (6)$$

因此,在波导中不仅存在以纵波传播的伸缩扰动,而且存在以横波传播的切变扰动。模式分析法是对波动方程进行时空分离,并求解模式特征值解的方法。式(4)中由于求解的是同一类型的方程,所以可将  $\varphi, \mathbf{H}$  统一记做  $\psi, c_L, c_T$  统一记做  $c$ , 初始状态下管道内外壁节点的位移及速度为 0。往  $z$  方向添加入射的简谐波,波的传播函数可以用  $\psi = U_0 \exp(i\omega t - ikz)$  进行描述,其中  $U_0$  为波的幅值矢量。于是对  $\psi$  作变量分离  $\psi = U(x, y, z)T(t) = U(x, y, z) \exp(i\omega t)$ , 可得到下面两个微分方程式。

$$\begin{cases} \Delta U + k^2 U = 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + k^2 c^2 T = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中: $k$  为分离常数波数; $U$  为波动位移幅值; $t$  为波在波导里的传播时间; $T$  为仅与  $t$  有关的待定函数; $x, y, z$  为空间坐标的笛卡尔坐标系; $\omega$  为波传播的角频率。

根据变分原理,亥姆霍兹方程相应的泛函可用下式表示。

$$\min[J(U)] = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [k^2 U^2 - (\Delta U)^2] d\Omega \quad (8)$$

式中: $\Omega$  为求解区域; $J(U)$  为波动位移幅值的能量,  $\min[J(U)]$  表示最小能量。

将其剖分为四边形网格,设  $N_i$  为形函数,记  $B = \nabla N_i$ 。则通过对泛函求极值可导出有限元方程,如式(9)所示。

$$\mathbf{A}U = 0 \quad (9)$$

式中: $\mathbf{A}$  为总体刚度矩阵,其表达式如式(10)所述。

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{N_e} \iiint_{\Omega} (-B^T B + k^2 N_i^T N_i) d\Omega \quad (10)$$

式中: $N_e$  为网格数。

若给定参数  $f$  (波的特征频率),有  $k = 2\pi f/c$ , 对式(9)中矩阵  $\mathbf{A}$  进行特征值求解,可得到一组  $k$ , 将  $k$  代入式(9),可求出  $U$ , 即模态特征。

## 2 频散分析

### 2.1 频散关系求解

以外径  $a$  为 30 mm, 内径  $b$  为 25 mm 的铝材管道为例,建立几何模型,添加材料为铝,并划分单元网格为四边形的映射网格,管道二维离散模型如图 1 所示。由于是理想情况下的管道,其不受外力作用,所以设置为自由边界条件。铝主要的材料参数如表 1

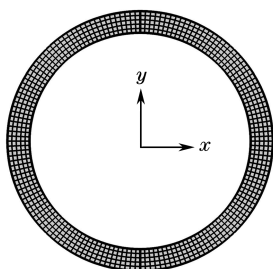


图1 管道二维离散模型

所示(表中  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为泊松比)。

表1 铝的材料参数

| $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$ | $E/\text{GPa}$ | $\nu$ |
|--------------------------------------|----------------|-------|
| 2 700                                | 70             | 0.33  |

将建立的几何模型放置在固体力学场中求解,设定求解步骤为模式分析,并取求解模式数为 30,选择频率步长为 100 Hz,模式搜索基准值为  $2\pi f/c$ ,这里根据经验值设定  $c$  为  $330 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,并以频率作为扫描参数。根据文献[7],通常导波检测所用的检测频率较常规超声波的频率低,由于管道截面中的导波高阶模态十分复杂,计算会引入较多的复杂模态,且对计算要求较高,因此选定求解频率的最大值为 100 kHz,通过求解得到了频率-波数曲线,如图 2 所示。为了验证文章方法的合理性,将其和半解析有限元方法求解的结果进行了比较。

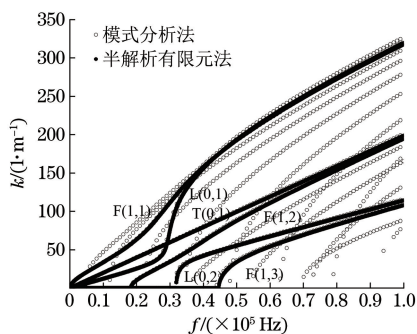


图2 频率-波数曲线

进一步地,由已求得的频率  $f$  及波数可求得相速度  $c_p$ ,其满足关系式

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k} \quad (11)$$

根据式(11)可得到其相速度频散曲线,如图 3 所示。

类似地,根据所求的频率波数关系,可知其群速度  $c_g$  满足以下表达式

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\pi\Delta f}{\Delta k} \quad (12)$$

为求得群速度,可使  $\Delta f = 1$ ,则需要另计算

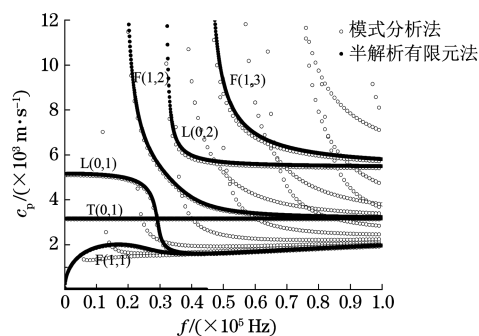


图3 相速度频散曲线

$f' = f + 1$  的波数值,以得到两组  $k$  值,求得  $\Delta k$ 。所求得的群速度频散曲线如图 4 所示。

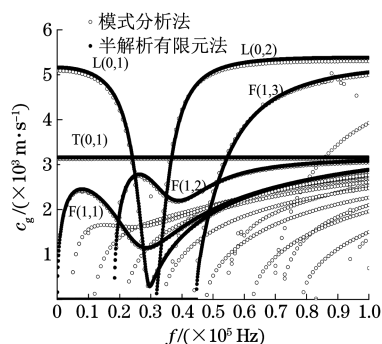


图4 群速度频散曲线

对图 2~4 进行分析,可以得到以下结论。

(1) 基于有限元的模式分析方法不但与半解析有限元法所得到的结果相吻合,而且求解得到了由结构特征变化衍生出来的环状模态<sup>[11-12]</sup>(两种方法所绘制曲线的未重合部分),证明了该法的有效性。环状模态是由于模式叠加产生的,在实际检测中应该避免该类模态产生,以降低检测信号的复杂性。

(2) 导波在管中传播存在多模态现象,高频情况下此现象更加突出。在 0~100 kHz 频段中两种方法所绘制曲线的重合部分,导波模态主要有纵向模态、扭转模态及弯曲模态三类,每一类模态又细分为多种模式。而随着频率的增加,模式数相应增加。

(3) 0~20 kHz 的低频段与频率超过 20 kHz 的频段相比,导波模态较少,且频率和波数之间的关系近似为线性关系。

## 2.2 频散关系分析

模式分析可对单一频率进行求解分析,鉴于高频段模态较多,低频段模态相对较少,又因为低频下的频散关系分析可通过弹性力学的相关理论来研究。因此,选取频率为 10 010 Hz 的频率进行计算,由图 2 可知,在该频率下导波存在纵向模态  $L(0,1)$ ,

扭转模态  $T(0,1)$  以及弯曲模态  $F(1,1)$ 。根据弹性波在固体中传播的理论,已知表 1 中的材料参数,结合式(5)与式(6),可得到纵波波速  $c_L = \sqrt{E/\rho}$ ,横波波速  $c_T = \sqrt{E/[\rho \cdot 2(1+\nu)]}$ ,并联立式(12)可求得该频率的纵向模态波数及扭转模态波数。对于在低频下的弯曲波,引入铁木辛柯梁(Timoshenko)理论<sup>[11]</sup>对其进行理论求解,于是有运动方程(13)。

$$\begin{cases} \kappa G \left( \frac{d^2 \omega_b}{dx^2} - \frac{d\theta_b}{dx} \right) = \rho \frac{d^2 \omega_b}{dt^2} \\ EI \frac{d^2 \theta_b}{dx^2} + \kappa \left( GA \frac{d\omega_b}{dx} - \theta_b \right) = \rho I \frac{d^2 \theta_b}{dt^2} \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $A$  为截面面积;  $I$  为截面惯性矩;  $\omega_b$  为弯曲位移;  $\theta_b$  为转角;  $\kappa$  为剪切系数;  $G$  为剪切模量。

根据参考文献[11]可得剪切系数如下式所示。

$$\kappa = \frac{6(1+\nu)(1+m^2)^2}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2} \quad (14)$$

式中:  $m$  为内外径之比,即  $b/a$ 。

对式(13)进行傅里叶变换,得到其解。对应的实数域下弯曲波数为

$$k_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \frac{\rho}{E} \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \omega^2 + \omega \left[ 4 \frac{\rho A}{EI} + \frac{\rho^2}{E^2} \left( 1 - \frac{E}{\kappa G} \right)^2 \omega^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

将  $\omega$  以及表 1 中的相关材料参数代入上式即可求得弯曲模态下的理论解。

综上所述,可得频率为 10 010 Hz 下的波数理论值,且可通过计算求得与其他两种方法的相对误差,如表 2 所示。

表 2 不同方法得到的结果比较

| 模态     | 理论解      | 半解析有限元法  | 模式分析法    | 半解析有限元法相对误差/% | 模式分析法相对误差/% |
|--------|----------|----------|----------|---------------|-------------|
| L(0,1) | 12.352 3 | 12.442 1 | 12.440 3 | 0.73          | 0.71        |
| T(0,1) | 20.145 9 | 19.889 0 | 20.145 9 | 1.20          | 0.00        |
| F(1,1) | 32.931 0 | 33.910 8 | 33.901 6 | 2.98          | 2.95        |

由表 2 可得到,由理论所求得的波数解与半解析有限元法、模式分析法所求的波数基本一致,均可得到准确解。但是,针对  $L(0,1)$  和  $F(0,1)$  模态的波数解,模式分析法较半解析有限元法的精度有微弱的提高,而扭转波模态  $T(0,1)$  波数的求解精度显著提高,可见模式分析法更适用于扭转模态的求解。综合来看,半解析有限元法与模式分析法所得结果的误差均较小,但是有限元的模式分析方法的精度更高,体现了该方法的优越性。

### 3 模态特征分析

模态特征可以表征导波在管道中传播的波结构特征,通常选取的模态特征有位移变化、应力变化以及能量变化。由于导波检测中较易获得位移量<sup>[14]</sup>,所以文章采用位移变化来表征模态特征,以频率为 10 010 Hz 时的各模态位移特征进行模态特征分析。为使得位移的表示更加合理,将笛卡尔坐标系下的位移变化量转换为柱坐标系下的位移变化量,则各个方向的位移如下式所示。

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中:  $u_x, u_y, u_z$  分别为模态在直角坐标系中的  $x, y, z$  三个方向上的位移分量;  $u_r, u_\theta, u_z$  分别为模态在柱坐标系中的径向、切向及轴向上的位移分量;  $\theta$  为旋转角。

通过上面的转换矩阵,在后处理结果中得到柱坐标下各个分量的位移,并对位移分量进行归一化处理,从而得到各模态下的位移分布,如图 5~7 所示。

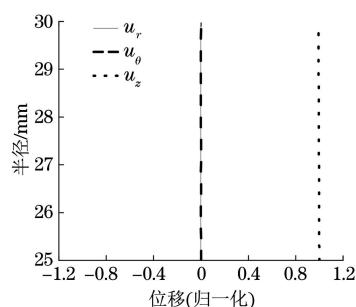


图 5 10 010 Hz 下  $L(0,1)$  模态的各分量位移图

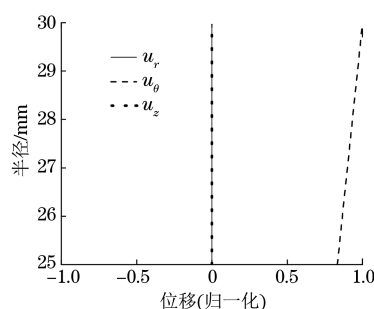


图 6 10 010 Hz 下  $T(0,1)$  模态的各分量位移图

由图 5 可知,  $L(0,1)$  模态存在轴向位移,内外壁的位移分布几乎相等,且远大于径向位移。而径向位移和周向位移量接近于 0。由图 6 可看出,对于  $T(0,1)$  模态的导波,存在周向位移,且外表面壁的位移比内表面壁的位移更大。而  $F(1,1)$  模态在三个分量下均有位移,周向位移和轴向位移都较小,



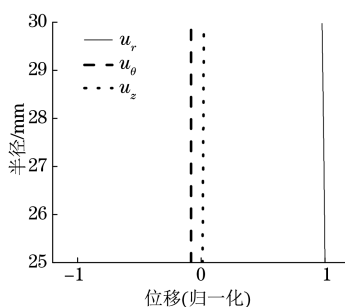


图7 10 010 Hz下F(1,1)模态的各分量位移图

径向位移最大,在管道中的传播比较复杂。

#### 4 结论

采用基于有限元的模式分析法求解管道中导波的频散关系,通过亥姆霍兹方程得到波数和角频率之间的关系式,并采用有限元方法进行了数值计算,利用 COMSOL Multiphysics 软件建立模型,给定频率参数,模式数及模式搜索基准值求解得到了频散曲线及管道截面上的位移形变结果。与半解析有限元方法的求解结果相比,模式分析法得到了由模式叠加产生的环状模态,说明了该法求解的全面性。同时,参照理论解,模式分析法的精度良好,且更适用于 T(0,1)模态的求解。

#### 参考文献:

- [1] 贾志绚,张潇,赵星,等.基于弹性波法的公路护栏立柱埋深无损检测技术及影响因素研究[J].北京工业大学学报,2012,38(6):870-874.
- [2] LONG R, CAWLEY P, LOWE M. Acoustic wave propagation in buried iron water pipes [J]. Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences, 2003, 459(2039):2749-2770.
- [3] LOWE M J S, CAWLEY P, PAVLAKOVIC B N. A general purpose computer model for calculating elastic waveguide properties, with application to non-destructive testing[C]// Surface Waves in Anisotropic and Laminated Bodies and Defects Detection, Dordrecht:

Kluwer Academic Publishers, 2004:241-256.

- [4] SECO F, JIMÉNEZ A R. Modelling the generation and propagation of ultrasonic signals in cylindrical waveguides [M]. London: InTech Open Access Publisher, 2012:1-28.
- [5] 何存富,王学浦,王秀彦,等.基于导波技术的高速公路护栏立柱埋深检测[J].中国公路学报,2008,21(6):37-42.
- [6] BOCCHINI P, MARZANI A, VIOLA E. Graphical user interface for guided acoustic waves[J]. Journal of Computing in Civil Engineering, 2011, 25(3):202-210.
- [7] 胡剑虹,唐志峰,吕福在,等.复合管道轴对称导波改进半解析有限元建模[J].浙江大学学报(工学版),2015,49(1):116-122.
- [8] 朱龙翔,王悦民,宗倡,等.基于模态分析方法的管道导波频散曲线计算[J].海军工程大学学报,2014(6):64-68.
- [9] 王悦民,杨波.磁致伸缩导波无损检测理论与方法[M].北京:科学出版社,2015.
- [10] 孙灵芳,徐曼菲,朴亨,等.基于流固耦合的换热管道污垢超声回波检测数值模拟与实验[J].中国机械工程,2017,28(3):340-348.
- [11] 鄂林仲阳,杜强,李小明.基于谱元法的空间刚架动力学特性分析[J].计算力学学报,2016,33(5):802-806.
- [12] COWPER G R. The shear coefficients in Timoshenko's beam theory[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(2):335-340.
- [13] ALLAEI D, SOEDEL W, YANG T Y. Natural frequencies and modes of rings that deviate from perfect axisymmetry [J]. Journal of Sound & Vibration, 1986, 111(1):9-27.
- [14] 徐进友,刘建平,王世宇,等.环状旋转周期结构模态摄动分析[J].天津大学学报(自然科学与工程技术版),2010,43(11):1015-1019.
- [15] 何存富,郑明方,吕炎,等.超声导波检测技术的发展、应用与挑战[J].仪器仪表学报,2016,37(8):1713-1735.

(上接第55页)

#### 参考文献:

- [1] 崔克楠,韩振华,聂伟伟,等.风电塔筒探伤经验介绍及

相关建议[J].无损检测,2012,34(8):70-72.

- [2] 刘长福,张彦新,李中伟,等.超声波相控阵技术原理及特点[J].河北电力技术,2008,27(3):29-31.