

# 高次驻波谐振定量检测弹性板厚度的方法

王禹然, 张辉, 张淑仪

(南京大学 声学研究所 近代声学实验室, 南京 210093)

**摘要:** 基于声波高次谐振的频率偏移与弹性板厚度变化间的关系, 提出一种定量检测弹性板厚度的新方法。针对最大有效机电耦合系数( $k_{\text{eff}}^2(\max)$ )对应的谐振模式, 研究了弹性板厚度对最大有效机电耦合系数对应模式的谐振频率的影响, 给出修正的频率偏移与厚度变化间的关系公式。相关数值计算表明, 该方法的检测灵敏度可达  $50 \text{ Hz}/\mu\text{m}$ , 可用于板厚及其变化的检测和板表面状况的无损评价。

**关键词:** 弹性板; 厚度检测; 高次驻波谐振; 有效机电耦合系数

中图分类号: TG115.28

文献标志码: A

文章编号: 1000-6656(2010)08-0593-04

## A Method for Quantitatively Evaluating Thickness of Elastic Plates Using High-Overtone Bulk Acoustic Resonance

WANG Yu-Ran, ZHANG Hui, ZHANG Shu-Yi

(Lab of Modern Acoustics, Institute of Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

**Abstract:** Based on the relations between the high-overtone bulk acoustic resonant frequency shifts and the changes of the elastic plate thickness, a method for the quantitative measurement of the thickness change of elastic plates was presented. For the harmonic mode with the maximum effective electromechanical coupling factor, the effects of the elastic plate thickness change on the order number of the mode were investigated, and the estimation formulae between frequency shift and thickness change were given. The numerical calculations demonstrated that the method had a high sensitivity of  $50 \text{ Hz}/\mu\text{m}$ , which could be used to nondestructively evaluate the thickness change and also the surface states of the elastic plates.

**Keywords:** Elastic plate; Thickness testing; High-overtone bulk acoustic resonance; Effective electromechanical coupling factor

提出一种基于高次驻波谐振的测量方法, 研究弹性板厚度对具有最大有效机电耦合系数的谐振模式频率偏移的影响, 并定量检测弹性板厚度的变化。此方法可以对金属、非金属和复合材料等进行无损检测, 且设备简单、易于操作。

首先介绍高次驻波谐振的理论; 其次对具有最大有效机电耦合系数的模式进行分析, 给出该模式数的修正公式; 最后建立该模式谐振频率偏移与检测弹性板厚度之间的关系。以 ZnO 为压电片, 针对

不同声阻抗的弹性板厚度变化进行数值计算与研究。

### 1 高次驻波谐振理论

将厚度膨胀振动的压电片置于被检测弹性板之上, 如果两者之间耦合紧密, 则构成高次驻波谐振结构, 如图 1 所示。其中压电片和其上下表面的两个

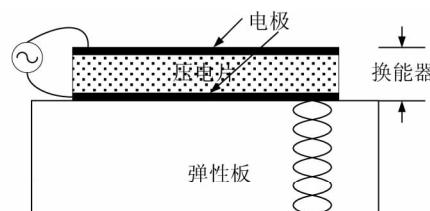


图 1 片状换能器测弹性板厚度变化的系统

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10774074); 教育部博士点基金资助项目(20090091120048)

**作者简介:** 王禹然(1986—), 男, 硕士研究生, 研究方向为超声检测。

电极构成的换能器在弹性板中激发厚度膨胀振动声波,当激发的声波半波长的整数倍与弹性板厚度相等时,将在弹性板中形成驻波谐振。一般情况下,弹性板的厚度较压电片厚很多,所以声波能量主要集中于板中。这样,检测系统的谐振特性将受到弹性板材料、表面状况和厚度等的影响。

上述高次驻波谐振结构可以利用 Mason 等效电路理论<sup>[1]</sup>进行分析。此检测系统的压电换能器输入阻抗  $Z_{in}$  表示为<sup>[2]</sup>:

$$Z_{in} = \frac{1}{j\omega C_0} \cdot \left[ 1 - \frac{k_t^2}{\gamma} \frac{(z_1 + z_2) \sin \gamma + j2(1 - \cos \gamma)}{(z_1 + z_2) \cos \gamma + j(1 + z_1 z_2) \sin \gamma} \right] \quad (1)$$

式中  $C_0 = \epsilon_{33}^S S/l$ , 是谐振器静态电容;  $S$  是电极面积;  $\epsilon_{33}^S$  为压电片介电常数;  $l$  是压电片厚度;  $k_t^2$  是压电片的机电耦合系数;  $\gamma = \omega l/V$ , 是纵波声速为  $V$  的压电片的相位延迟;  $\omega$  是角频率;  $z_1$  是上电极经过  $Z_0$  归一化处理后的声负载阻抗;  $z_2$  是下电极和弹性板的复合层经过  $Z_0$  归一化处理后的声负载阻抗;  $Z_0 = S\rho V$ , 是压电片的声阻抗;  $\rho$  是压电片的密度。

根据式(1),针对厚度为 0.05 mm 的 PZT 压电片和厚度为 2.4 mm 的不锈钢弹性板,计算其输入电阻抗曲线,如图 2 所示。可以看出,随着频率增加,激发出许多高次谐振模式。每一个谐振模式包括并联谐振频率  $f_p$  和串联谐振频率  $f_s$ 。为简化分析,引入并联谐振频率间隔  $\Delta f_p$  作为分析参量,具体定义为:

$$\Delta f_p(m) = f_p(m+1) - f_p(m) \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

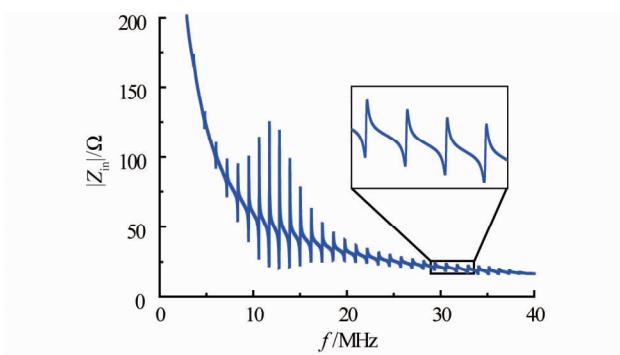


图 2 输入电阻抗曲线

式中  $f_p(m+1)$  和  $f_p(m)$  分别是高次驻波谐振系统在第  $m+1$  和第  $m$  阶模式的并联谐振频率。

$$\Delta f_N = \Delta f_0 \left( 1 + \frac{\rho_{el} l_{el} + \rho_{ez} l_{ez} + d}{\rho_{sb} l_{sb}} \right)^{-1} \quad (3)$$

$$\Delta f_T = \Delta f_0 \cdot$$

$$\left( 1 + \frac{\rho_{sb} V_{sb}^2}{\rho V^2} \frac{l}{l_{sb}} + \frac{\rho_{sb} V_{sb}^2}{\rho_{ez} l_{ez}} \frac{l_{ez}}{l_{sb}} + \frac{\rho_{sb} \rho_{el} V_{sb}^2}{\rho V^2} \frac{l_{el}}{l_{sb}} \right)^{-1} \quad (4)$$

式中  $\Delta f_N$  指并联谐振频率分布中的第一个稳态区域中间模式( $m_N$ )所对应的并联谐振频率间隔,  $\gamma \approx \pi$ ;  $\Delta f_T$  指并联谐振频率分布中的第一个瞬态区域中间的模式( $m_T$ )所对应的并联谐振频率间隔,  $\gamma \approx 0.5\pi$ ; 而  $\Delta f_0 = V_{sb}/2l_{sb}$ , 指弹性板厚度膨胀振动时的并联谐振频率间隔。

此外,根据 ANSI/IEEE 标准对有效机电耦合系数  $k_{eff}^2$  的定义<sup>[3]</sup>,高次驻波谐振系统的  $m$  阶谐振模式对应的  $k_{eff}^2(m)$  为:

$$k_{eff}^2(m) = \frac{\pi^2}{4} \frac{f_s(m)}{f_p(m)} \left[ 1 - \frac{f_s(m)}{f_p(m)} \right] \quad (5)$$

以下电极的二分之一处为分界线,将高次驻波谐振系统分为两层,引入上下两层的半波长谐振频率比例因子  $R$ 。当  $R$  足够大时,稳态区域和瞬态区域中间的模式可近似表示为:  $m_N = \text{round}(R)$ ,  $m_T = \text{round}[(R-1)/2]$ , 其中  $R$  为<sup>[2]</sup>:

$$R = \frac{f_c}{f_{sb}} = \frac{V \left( l_{sb} + \frac{1}{2} \frac{\rho_{ez} l_{ez}}{\rho_{sb}} \right)}{V_{sb} \left( l + \frac{\rho_{el} l_{el}}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\rho_{ez} l_{ez}}{\rho} \right)} \quad (6)$$

实际测量中,为避免压电片激发带宽的影响,通常采用压电片基模谐振频率附近区域的驻波谐振模式。在文献<sup>[4]</sup>的研究中,已经指出最大有效机电耦合系数对应的高次驻波谐振模式在第一稳态和瞬态区域附近,且在测量中该模式具有较大的阻抗幅值,因此该模式最适宜用以研究弹性板厚度的变化。

## 2 弹性板声阻抗对 $k_{eff}^2(\max)$ 对应谐振模式的影响

最大有效机电耦合系数所对应的谐振模式具有较高的阻抗幅值,且容易激发而获得较高的检测灵敏度,所以利用其作为检测模式<sup>[5]</sup>。Wang<sup>[6]</sup>等人分析了具有最大有效机电耦合系数  $k_{eff}^2(\max)$  的谐振模式,重点研究其模式数的变化规律。

如果根据弹性板和压电片声阻抗比  $z_b = (\rho_{sb} V_{sb})/(\rho V)$  来确定  $k_{eff}^2(\max)$  对应模式的次数,可有以下三种情形: ①  $z_b \gg 1$ , 为硬基片条件,  $k_{eff}^2(\max)$  落在瞬态区域中间,即  $m_T$  附近, 对应频率约为  $f = V/4l$ 。②  $z_b \ll 1$ , 为软基片条件,  $k_{eff}^2(\max)$  落在稳态区域中间,即  $m_N$  附近, 对应频率约为  $f = V/2l$ 。③  $z_b$  在 1 附近时,  $k_{eff}^2(\max)$  对应的模式数则落在

$m_T$  和  $m_N$  的之间。所以,只有“很硬”或“很软”的压电片和弹性板组合,  $k_{\text{eff}}^2(\text{max})$  对应的模式次数可以用  $m_T$  或  $m_N$  近似表示外,其它情形下,将难以估算  $k_{\text{eff}}^2(\text{max})$  对应的模式次数。

所以,快速准确地估算  $k_{\text{eff}}^2(\text{max})$  对应的模式次数,是此方法应用的关键问题。根据式(1),(2),(5)和(6)对不同材料组合进行数值计算,并对  $k_{\text{eff}}^2(\text{max})$  对应的模式次数和 Mason 模型计算的  $m_T$  和  $m_N$  进行拟合,给出  $k_{\text{eff}}^2(\text{max})$  对应次数的修正公式:

$$m = \begin{cases} (1 - 0.1z_b) \cdot m_N & z_b < 0.8 \\ \frac{1}{2}[(1 - 0.2z_b) \cdot m_N + (1 + 0.1/z_b) \cdot m_T] & 0.8 \leq z_b \leq 1.3 \\ (1 + 0.2/z_b) \cdot m_T & z_b > 1.3 \end{cases} \quad (7)$$

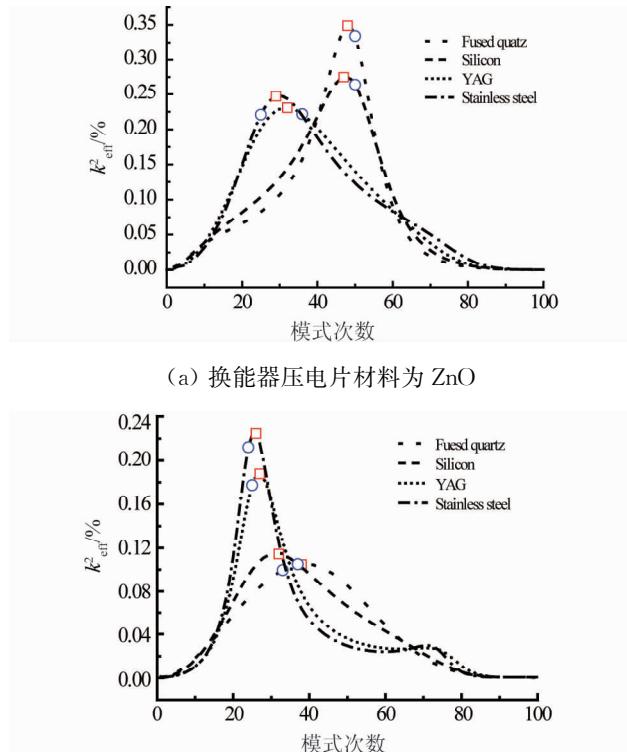
利用式(7),针对压电片材料为 ZnO 和 PZT 的片状换能器在不同声阻抗的弹性板上的情形进行数值计算。计算中片状换能器厚度取 1 mm,上下电极厚度取为  $1\mu\text{m}$  的 Al 电极,弹性板厚度的选取满足  $R \approx 50$ ,相关材料的参数如表 1 所示,其中 PZT 材料的制备方法为 sol-gel<sup>[6]</sup>。相关计算结果如图 3,图中圆圈点表示 Wang 等人推荐的估算方法得到的  $k_{\text{eff}}^2(\text{max})$  对应的模式次数,而方块点表示采用修正公式(7)得到的  $k_{\text{eff}}^2(\text{max})$  对应的模式次数。根据计算结果可知,加入  $z_b$  参量后的修正公式估算得到的模式次数,更接近或等于大量数值计算得到的  $k_{\text{eff}}^2(\text{max})$  对应的模式次数。修正前后的估算公式所得到的模式次数与  $k_{\text{eff}}^2(\text{max})$  对应的模式次数的相对误差如表 2 所示。可以看到修正后的相对误差明显小于修正前的相对误差,这说明修正公式是有效的。

表 1 压电片、弹性板和电极的材料参数

材料	$\rho / (\times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$V / (\times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\rho V / (\times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1})$	$k_t^2$
ZnO	5.67	6.00	34.02	0.08
PZT	7.00	2.40	16.80	0.04
熔融石英	2.65	6.05	16.03	
Si	2.33	8.94	20.83	
YAG	4.55	8.55	38.91	
不锈钢	7.80	5.90	46.02	
Al	2.70	6.42	17.33	

### 3 弹性板厚度变化与 $k_{\text{eff}}^2(\text{max})$ 对应谐振模式 $\Delta f_p$ 间的关系

由于弹性板厚度的变化会导致并联谐振频率发

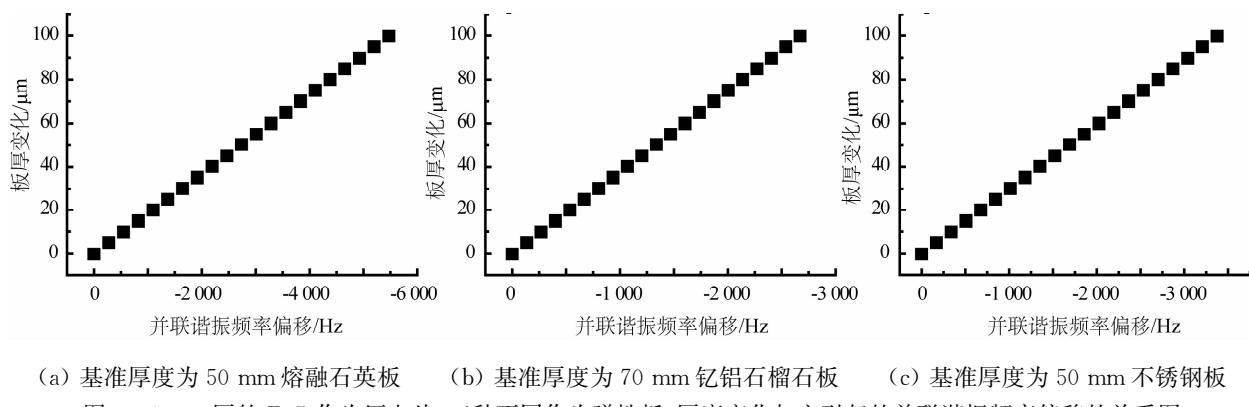
图 3 不同声阻抗的弹性板上,数值计算得到的  $k_{\text{eff}}^2$  曲线表 2 修正前后的估算得到的模式次数与  $k_{\text{eff}}^2(\text{max})$  对应的模式次数的相对误差

材料	$z_b = \frac{\rho_{\text{sb}} V_{\text{sb}}}{\rho V}$	Wang / %	修正后 误差 / %
ZnO/熔融石英	0.47	4.2	0.0
ZnO/Si	0.61	6.4	0.0
PZT/熔融石英	0.95	12.5	2.5
ZnO/YAG	1.14	12.5	0.0
PZT/Si	1.24	19.4	3.2
ZnO/不锈钢	1.25	16.7	3.3
PZT/YAG	2.32	7.4	0.0
PZT/不锈钢	2.54	7.7	0.0

生偏移,通过建立它们之间的解析关系可以定量表征弹性板的厚度变化。根据并联谐振频率间隔分布理论,在稳态区域,已知<sup>[2]</sup>:

$$f_p(m_N + 1) = \frac{(m_N z_{\text{sb}} + 1)}{2 \left( \frac{z_{\text{el}} l_{\text{el}}}{V_{\text{el}}} + \frac{z_{\text{sb}} l_{\text{sb}}}{V_{\text{sb}}} + \frac{z_{\text{e2}} l_{\text{e2}}}{V_{\text{e2}}} + \frac{l}{V} \right)} \quad (8)$$

在片状换能器中,若电极的厚度相对压电片而言很薄,则忽略电极的影响。在模式数尚未发生跳变的情况下,推导弹性板厚度变化  $\Delta l$  时,并联谐振频率的偏移为:



(a) 基准厚度为 50 mm 熔融石英板 (b) 基准厚度为 70 mm 钇铝石榴石板 (c) 基准厚度为 50 mm 不锈钢板

图 4 1 mm 厚的 ZnO 作为压电片,三种不同作为弹性板,厚度变化与之引起的并联谐振频率偏移的关系图

$$\Delta f_p^{\Delta}(m_N + 1) = f_p^{\Delta}(m_N + 1) - f_p(m_N + 1) \approx -\frac{(m_N z_{sb} + 1)V_{sb} z_{sb}}{2(V_{sb} l/V + z_{sb} l_{sb})^2} \cdot \Delta l \quad (9)$$

类似的,在瞬态区域,已知<sup>[2]</sup>:

$$f_p(m_T + 1) = \frac{1}{2z_{sb}} \frac{m_T z_{sb} + \frac{1}{2} + \frac{z_{sb}}{2}}{\left( \frac{l}{V} + \frac{l_{sb}}{z_{sb} V_{sb}} + \frac{l_{c2}}{z_{c2} V_{c2}} + z_{el} \frac{l_{el}}{V_{el}} \right)} \quad (10)$$

忽略电极的影响,并联谐振频率的偏移为:

$$\Delta f_p^{\Delta}(m_T + 1) = f_p^{\Delta}(m_T + 1) - f_p(m_T + 1) \approx -\frac{(m_T + 1/2 + z_{sb}/2)V_{sb}}{2(z_{sb} V_{sb} l/V + l_{sb})^2} \cdot \Delta l \quad (11)$$

式(9)和(11)说明,弹性板厚度变化  $\Delta l$  所引起的并联谐振频率偏移  $\Delta f_p$  与  $\Delta l$  成线性关系。因此,若选择待测弹性板作为基片层,选定已知厚度的弹性板作为参照基准,测量待测弹性板与基准弹性板在  $k_{eff}^2(\max)$  对应频率的差值,就可以间接得到待测板与基准板的相对厚度变化。

针对具有最大有效机电耦合系数的谐振模式,采用 1 mm 厚 ZnO 作为压电片,熔融石英、钇铝石榴石、不锈钢作为弹性板,研究弹性板厚度增加时厚度变化与之引起的并联谐振频率偏移的关系,相关计算结果如图 4 所示。数值计算表明,基准弹性板厚度满足  $R \approx 50$  时,  $k_{eff}^2(\max)$  对应的并联谐振频率  $f_p$  每偏移数十赫兹可定量检测出 1  $\mu\text{m}$  厚的弹性板厚度变化。

## 4 结论

通过研究弹性板厚度对最大有效机电耦合系数  $k_{eff}^2(\max)$  对应的模式次数的影响,给出修正的频率偏移与厚度变化的关系公式,提高了最大有效机电耦合系数  $k_{eff}^2(\max)$  对应模式数的计算精度。高次驻波谐振对板状材料的厚度或者表面状况进行定量

表征,具有设备简单,精度高,不破坏测试物体等优点,有望成为未来无损检测的重要手段。为满足实际应用,还需要考虑以下几个问题:首先,对于压电层和弹性板的任何阻抗匹配情形,需要建立弹性板厚度、表面状况与最大有效机电耦合系数  $k_{eff}^2(\max)$  对应的模式的关系模型;其次,对于表面粗糙的情形,压电片状换能器和弹性板之间耦合层的影响规律仍需考虑。

## 参考文献:

- [1] Lakin K M, Kline G R, McCarron K T. High-Q microwave acoustic resonators and filters[J]. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions*, 1993, 41(12):2139–2146.
- [2] Zhang Y X, Wang Z Q, Cheeke J D N. Resonant spectrum method to characterize piezoelectric films in composite resonators[J]. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions*, 2003, 50(3):321–333.
- [3] IEEE Standard on Piezoelectricity ANSI/IEEE Std 176–1987, 1988[S].
- [4] Zhang H, Zhang S Y, Zheng K. Electrode effects on general modes in high-overtone bulk acoustic resonators[J]. *Ultrasonics*, 2006, 44(S1):e737–e740.
- [5] Zhang H, Zhang S Y, Fan L. Effects of thickness deviation of elastic plates in multi-layered resonance systems on frequency spectra[J]. *Chinese Physics Letters*, 2009, 26(8):4301
- [6] Pao Shih-Yung, Chao Min-Chiang, Wang Zuoqing, et al. Analysis and experiment of HBAR frequency spectra and applications to characterize the piezoelectric thin film and to HBAR design[C]. *Frequency Control Symposium and PDA Exhibition, 2002. IEEE International*, 2002:27–35.