

一种具有聚焦作用的线圈涡流问题解析解

张敬因, 雷银照

(北京航空航天大学 电气工程系, 北京 100083)

摘要:为检测导体内更深处的缺陷, 提出用8字形线圈作为涡流检测线圈, 得到了8字形线圈在半无限大线性导体上方时涡流问题的解析解。仿真计算表明, 与平行于导体表面放置的圆环形线圈相比, 8字形线圈所激励的涡流密度峰值更大, 能量分布更集中。试验验证了斜置线圈的阻抗表达式。研究结果可用于指导涡流检测探头的设计。

关键词:涡流检测; 8字形线圈; 探头设计; 解析解

中图分类号: TG115.28

文献标识码: A

文章编号: 1000-6656(2007)02-0057-04

Analytical Solution of Eddy Current Problem Due to a Figure-8-shaped Coil Above a Conducting Plate

ZHANG Jing-yin, LEI Yin-zhao

(The Department of Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China)

Abstract: The eddy current problems of a figure-8-shaped coil were studied with analytical method. The study was based on the theory of eddy current field due to a circular current loop in an arbitrary position above a conducting plate. Expression of impedance increment of the figure-8-shaped coil, as well as the eddy current distribution within conducting medium, versus the angle between the double loops of figure-8-shaped coil was presented. By the means of simulation, it was concluded that eddy current density in conducting plate excited by the figure-8-shaped coil was greater and its distribution was more concentrative compared with that by a current loop parallel to plate in the same conditions. The result could be applied in eddy current testing sensor design.

Keywords: Eddy current testing; Figure-8-shaped coil; Sensor; Analytical solution

涡流检测用线圈有多种形式, 如绝对式、差动式和穿过式等, 这些线圈大多都用圆形线圈。由于涡流分布在导体表面附近, 所以涡流检测的有效检测区域仅限于距离导体表面的几个透入深度内。如何检测到导体内更深处的缺陷, 成为涡流检测研究的重要课题。为此, 笔者首次提出了一种8字形涡流检测线圈的方案, 使被测导体中涡流分布区域更加集中、涡流强度大大增加, 这种激励线圈聚焦了导体内的电磁能量, 从而有效提高了涡流检测的深度。

笔者利用时谐电磁场理论, 建立了倾斜于导体表面放置的线圈涡流问题的矢量磁位边值问题, 求

解得到了阻抗增量表达式并给予了试验验证。在此基础上, 数值模拟了8字形线圈激励的涡流分布和阻抗增量变化。结果表明, 这种由两个倾斜放置的圆形线圈所组成的8字形检测线圈比平行放置的检测线圈涡流强度的幅值更大, 区域更集中。

1 斜置线圈激励的涡流问题

下面利用文献[1]中的分析方法求解。

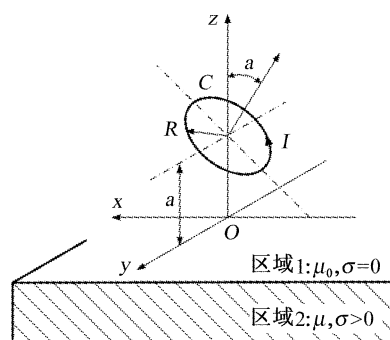
斜置线圈是指单匝圆环线圈所在平面的法线与导体平面法线构成一定角度 α 的通电圆环线圈, 其电磁模型如图1所示。建立直角坐标系 $Oxyz$, 选取 xOy 平面与导体平面重合, y 轴与线圈所在平面平行, 轴穿过线圈的几何中心, 线圈几何中心至导体表面的距离是 a 。

图1中曲线 C 表示由细导线绕成的圆环线圈,

收稿日期: 2006-02-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(50377002)

作者简介: 张敬因(1979—), 男, 硕士研究生。



(σ 为电导率, μ 为磁导率, μ_0 为空气中的磁导率)

图1 斜置线圈的电磁模型

线圈中通有电流 I (有效值相量), 曲线 C 可以表示为两曲面的交线

$$\begin{cases} m(x, z) = 0 \\ q(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $m(x, z) = 0$ 表示线圈所在平面的方程, $q(x, y, z) = 0$ 表示圆柱面方程, 柱面的对称轴穿过线圈的几何中心, 并垂直于线圈所在平面。函数 m 和 q 的表达式为

$$m(x, z) = x \sin \varphi - (z - a) \cos \varphi \quad (2)$$

$$q(x, y, z) = \sqrt{[x \cos \varphi + (z - a) \sin \varphi]^2 + y^2} - R \quad (3)$$

其中 R 为圆环线圈的半径。于是, 上半空间电源的电流密度可以表示为^[2]

$$\mathbf{J}_s = I \delta(m) \delta(q) \boldsymbol{\theta}_i(x, y, z) \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{\theta}_i(x, y, z)$ 为电流方向的单位矢量。对于曲线 C 上的场点, $\boldsymbol{\theta}_i(x, y, z)$ 的方向与该点电流的参考方向一致; 对于曲线 C 以外的场点, 由于关于 m 和 q 的广义狄拉克函数 $\delta(m) = 0$ 和 $\delta(q) = 0$, 所以 $\boldsymbol{\theta}_i(x, y, z)$ 的方向可以任意选取。

根据麦克斯韦方程组, 由方程 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 可引入矢量磁位 $\mathbf{A}$, 满足 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$; 忽略位移电流, 采用库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 可建立各区域中矢量磁位所满足的约束方程。在区域 1 ($z > 0$) 中的矢量磁位 $\mathbf{A}_1$ 可看作是斜置线圈在无限大真空中产生的场 $\mathbf{A}_1'$ 和导体中的涡流在区域 1 中产生的场 $\mathbf{A}_1''$ 的叠加, 即

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1' + \mathbf{A}_1'' \quad (5)$$

由于区域 1 是真空区域, 根据方程 $\nabla \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s$ 和矢量微分恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$, 可得 $\nabla^2 \mathbf{A}_1 = -\mathbf{J}_s$, 于是上半空间区域的约束方程为

$$\nabla^2 \mathbf{A}_1' = -\mu_0 I \delta(m) \delta(q) \boldsymbol{\theta}_i(x, y, z) \quad (6)$$

和

$$\nabla^2 \mathbf{A}_1'' = 0$$

在区域 2 ($z < 0$) 中, 根据方程 $\nabla \times \mathbf{E}_2 = -j\omega \mathbf{B}_2$,

$\nabla \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_2$ ($\mathbf{J}_2$ 是导体中的涡流密度) 以及上述矢量微分恒等式可得

$$\nabla^2 \mathbf{A}_2 = \mu \sigma (j\omega \mathbf{A}_2 + \nabla \phi_2)$$

式中 ϕ_2 为区域 2 中的标量电位, 由于在区域 2 中不存在外源, 所以在库仑规范下令 $\phi_2 = 0$ 而不影响磁感应强度和电场强度的计算结果^[3], 因此下半空间导体中矢量磁位满足的约束方程为

$$\nabla^2 \mathbf{A}_2 - j\omega \mu \sigma \mathbf{A}_2 = 0 \quad (8)$$

分界面 $z=0$ 上的边界条件为

$$[A_{2x} - (A'_{1x} + A''_{1x})] \big|_{z=0} = 0 \quad (9)$$

$$[A_{2y} - (A'_{1y} + A''_{1y})] \big|_{z=0} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_{2z}}{\mu_0} - \frac{A'_{1z} + A''_{1z}}{\mu} \right) \bigg|_{z=0} =$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_{2x}}{\mu_0} - \frac{A'_{1x} + A''_{1x}}{\mu} \right) \bigg|_{z=0} \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_{2z}}{\mu_0} - \frac{A'_{1z} + A''_{1z}}{\mu} \right) \bigg|_{z=0} =$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_{2y}}{\mu_0} - \frac{A'_{1y} + A''_{1y}}{\mu} \right) \bigg|_{z=0} \quad (12)$$

由于采用了库仑规范, 因此矢量磁位满足

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_1 = \nabla \cdot (\mathbf{A}_1' + \mathbf{A}_1'') = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_2 = 0 \quad (14)$$

无限远条件为

$$\mathbf{A}_1'' \big|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{A}_2 \big|_{z \rightarrow -\infty} = 0 \quad (16)$$

依照文献[1]中的思路求解以上边值问题式(6)~(16), 可求出 $\mathbf{A}_1''$ 和 $\mathbf{A}_2$ 的各分量为

$$A''_{1x} = \frac{\mu_0 R I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\mu_r \psi}{\mu_r k + \lambda} - j \cos \varphi \right) \cdot \frac{v e^{-k(z+a) + j(ux+vy)}}{k\psi} I_1(R\psi) du dv \quad (17)$$

$$A''_{1y} = \frac{\mu_0 R I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{2\mu_r u \psi}{\mu_r k + \lambda} + j \cos \varphi + k \sin \varphi \right) \cdot \frac{e^{-k(z+a) + j(ux+vy)}}{k\psi} I_1(R\psi) du dv \quad (18)$$

$$A''_{1z} = \frac{j\mu_0 R I \sin \varphi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v e^{-k(z+a) + j(ux+vy)}}{k\psi} \cdot I_1(R\psi) du dv \quad (19)$$

$$A_{2x} = \frac{\mu R I}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu_r k + \lambda} \cdot \frac{v}{k} e^{\lambda z - ka + j(ux+vy)} \cdot I_1(R\psi) du dv \quad (20)$$

$$A_{2y} = -\frac{\mu R I}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu_r k + \lambda} \cdot \frac{u}{k} e^{\lambda z - ka + j(ux+vy)} \cdot I_1(R\psi) du dv \quad (21)$$

$$A_{2z} = 0 \quad (22)$$

式中 $\mu = \mu_r \mu_0$;

μ_r ——导体的相对磁导率;

$$k = \sqrt{u^2 + v^2};$$

$$\lambda = \sqrt{k^2 + j\omega\mu\sigma};$$

$$\phi = u\sin\varphi + jk\cos\varphi;$$

$I_1(t)$ ——第一类修正贝塞尔函数^[4]。

进一步可以得到线圈阻抗增量和导体中涡流密度表达式

$$\Delta Z = Z - Z_0 = \frac{j\omega}{I} \oint_C \mathbf{A}''_1 \cdot d\mathbf{l} = \frac{j\omega\mu_0 R^2}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_r k - \lambda}{\mu_r k + \lambda} \frac{e^{-2ka}}{k} |I_1(R\psi)|^2 dudv \quad (23)$$

式中 Z 和 Z_0 分别为存在半无限大导体时和无限大真空中线圈的阻抗。

导体中的电流密度 $\mathbf{J}_2 = -j\omega\sigma\mathbf{A}_2$, 各个方向的分量为

$$J_{2x} = -\frac{j\mu\sigma\omega RI}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu_r k + \lambda} \cdot \frac{v}{k} e^{\lambda z - ka + j(ux + vy)} \cdot I_1(R\psi) dudv \quad (24)$$

$$J_{2y} = -\frac{j\mu\sigma\omega RI}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu_r k + \lambda} \cdot \frac{u}{k} e^{\lambda z - ka + j(ux + vy)} \cdot I_1(R\psi) dudv \quad (25)$$

$$J_{2z} = 0$$

2 斜置线圈阻抗增量表达式的试验验证

为了验证以上结果,利用 LRC 检测仪测量了圆形线圈在金属铝块附近时的线圈电阻和电感随线圈倾斜角的变化情况。金属铝块的电导率 $\sigma = 37 \times 10^6$ S/m,长方体铝块的几何尺寸远大于线圈半径,可近似看作半无限大导体;空心圆柱线圈由直径为 $\phi 0.06$ mm 的铜导线密绕而成,匝数约 500 匝,线圈的内半径 $R_1 = 4.3$ mm,外半径 $R_2 = 6.1$ mm,线圈高度 $h \approx 1$ mm。测试时,线圈提高 $a \approx 10$ mm,测试频率 $f = 10$ kHz。

试验中所用的线圈可以看作是许多圆环线圈的集合,根据叠加原理,矩形截面线圈的阻抗增量 ΔZ_{rc} 为^[2]

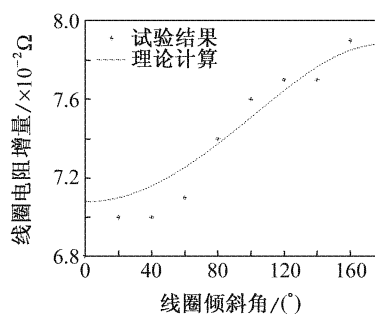
$$\Delta Z_{rc} = j\omega N \int_V \frac{\mathbf{A}''_{rc}(P) \cdot \mathbf{e}(P)}{I} dV \quad (27)$$

式中 V ——矩形截面线圈所占据的体积;

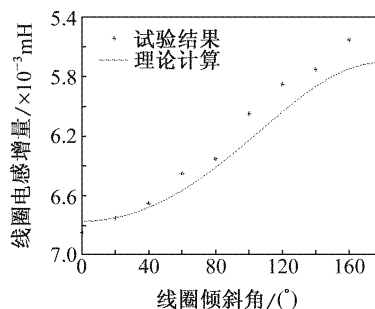
$\mathbf{e}(P)$ —— V 内的点 P 处电流方向的单位矢量;

$\mathbf{A}''_{rc}(P)$ ——矩形截面线圈在导体中激励的涡流产生的矢量磁位。

矩形截面线圈的电阻增量、电感增量的试验结果与理论计算结果如图 2 所示,可见测量值和理论



(a) 电阻随线圈倾角的变化曲线



(b) 电感随线圈倾角的变化曲线

图 2 斜置线圈阻抗增量随倾斜角度的变化

计算值有相同的变化趋势;线圈电阻增量为正,且随线圈倾斜角 α 的增大而增大;电感增量为负,且绝对值随线圈倾斜角的增大而减小。

3 8 字形线圈的涡流问题

8 字形线圈的结构和摆放方式如图 3 所示,它由两个相同半径 R 的圆环线圈 C_1 和 C_2 所组成, C_1 和 C_2 关于平面 yOz 对称放置,是 8 字形线圈的两翼,角度 2β 为线圈的两翼张角。运用以上理论结果分析 8 字形线圈的阻抗增量,并探讨导体中涡流分布随两翼张角的变化规律。

C_1 和 C_2 可看作两个独立的斜置线圈,其中 C_1 的几何中心位于点 $(R\sin\beta, 0, a)$ 处,倾斜角为 $\pi/2 - \beta$; C_2 的几何中心位于点 $(-R\sin\beta, 0, a)$ 处,倾

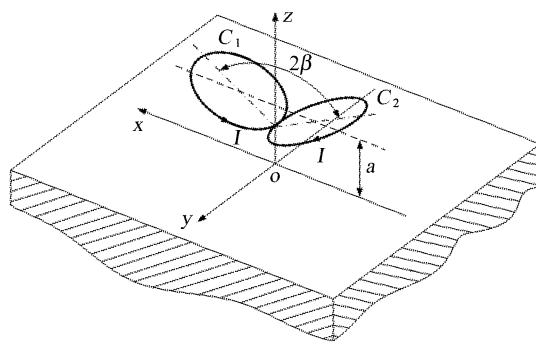


图 3 8 字形线圈的涡流检测模型

斜角为 $\pi/2 + \beta$, 8 字形线圈激发的涡流场是这两个线圈分别产生的涡流场的叠加。利用无量纲量 $x' = x/R, y' = y/R, z' = z/R, a' = a/R, u' = uR, v' = vR, k' = kR, \lambda' = \sqrt{k^2 + j\omega\sigma\mu_0 R^2}$ 以及 $\psi' = u' \cos\beta + jk' \sin\beta$, 线圈阻抗增量 ΔZ 和导体中涡流分布 J 的表达式分别表示为

$$\Delta Z = j\omega\mu_0 R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_r k' - \lambda'}{\mu_r k' + \lambda'} \cdot \frac{e^{-2k'a'}}{k'} I_1^*(\psi') \cdot \left[I_1(\psi') - \left(\frac{2v'^2 \sin^2 \beta}{\psi'^2} + 1 \right) e^{2ju' \sin \beta} I_1^*(\psi') \right] du' dv' \quad (28)$$

$$J_{2x} = -\frac{j\mu\sigma\omega I}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k'a'}}{\mu_r k' + \lambda'} \cdot \frac{v'}{k'} e^{\lambda'z' + j(ux' + vy')} \cdot \operatorname{Re}[I_1(\psi') e^{-ju' \sin \beta}] du' dv' \quad (29)$$

$$J_{2y} = -\frac{j\mu\sigma\omega I}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k'a'}}{\mu_r k' + \lambda'} \cdot \frac{u'}{k'} e^{\lambda'z' + j(ux' + vy')} \cdot \operatorname{Re}[I_1(\psi') e^{-ju' \sin \beta}] du' dv' \quad (30)$$

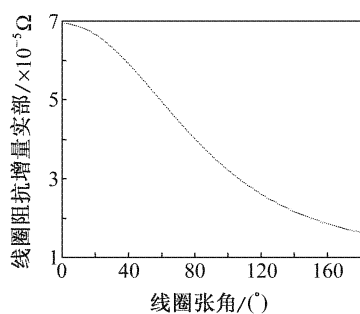
$$J_{2z} = 0 \quad (31)$$

式中 I_1^* —— I_1 的共轭复数;

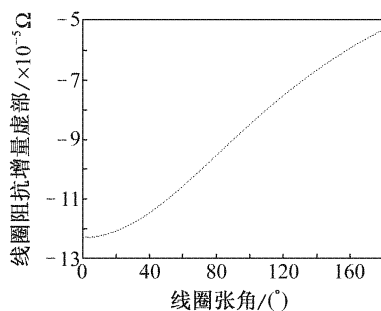
ψ'^* —— ψ' 的共轭复数。

在仿真中,以上各式中的参数分别取为 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, $\sigma = 37 \times 10^6$ S/m, $\omega = 2\pi \times 10^4$ rad/s, $R = 1$ mm, 相对提离 $a' = 1.2$, 电流有效值 $|I| = 1$ A。

根据式(28),线圈阻抗增量随线圈张角的变化如图4所示,可知阻抗增量的实部和虚部的绝对值



(a) 阻抗实部随线圈张角的变化

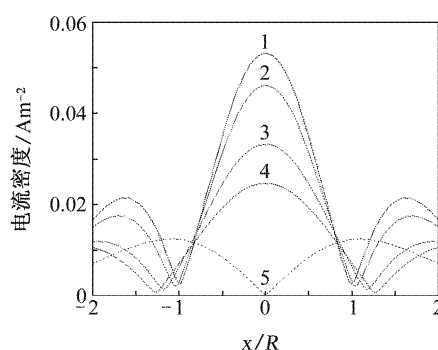


(b) 阻抗虚部随线圈张角的变化

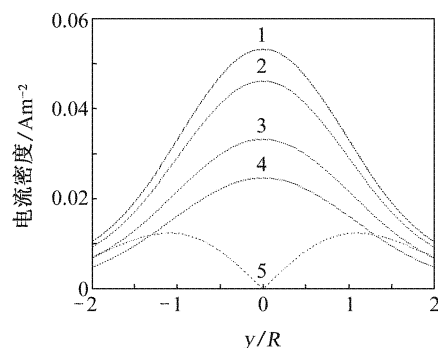
图4 线圈阻抗增量随线圈张角的变化

都随线圈张角的增大而减小,因此增量的模也随线圈张角的增大而减小。

利用式(29)~(31)可计算导体中任意一点的涡流密度。图5各曲线反映了线圈在不同张角下所激励的涡流密度大小沿 x 和 y 轴的变化情况。图中原点位于线圈两翼交点正下方,曲线1~4分别对应的线圈张角为 $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ 和 180° , 曲线5表示的是具有相同半径、同样提离高度,通以相同电流的平行放置的圆环线圈产生的涡流密度的变化情况。需要说明的是,在 x 和 y 轴上,涡流的 x 轴向分量均为零。图5大致反映了导体中涡流密度的分布情况。



(a) 涡流密度沿 x 轴的分布



(b) 涡流密度沿 y 轴的分布

图5 不同线圈张角下涡流密度的分布

图6是在线圈张角 $2\beta = 90^\circ$ 时,导体表面 ($z=0$)

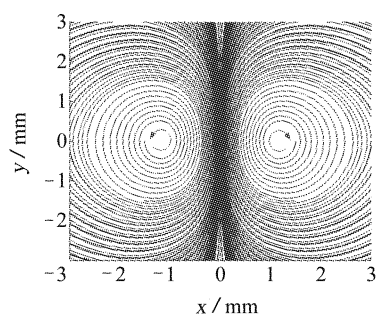


图6 在导体平面 $z=0$ 上线圈张角 $2\beta = 90^\circ$ 时的涡流分布
(下转第70页)

缺陷的幅值越大,测量的误差越小,但幅值达到一定程度,误差将趋向一定值。从图中可以得到 INE-TEC 公司于田湾核电站 SG 传热管检查系统的测量,在探头直径 ≥ 11.5 mm 时误差大约是 $\pm 12\%$ 。

6 缺陷增长速率或连续两次检查之间的运行余量

由于在腐蚀裂纹的尖端形成材料的塑性区,正常运行工况下传热管材料的应力水平较低(大约为三分之二弹性区应力范围),如果在干燥的空气中,裂纹的扩张速率是很低的,每年不会超过壁厚的5%。

无论是 WWER 还是 PWR 机组,运行经验都表明了二回路水质是导致蒸汽发生器传热管降质的最重要的原因,二回路水质变劣将直接加速传热管腐蚀裂纹的扩展速度。因此在机组运行过程中要对二回路水质按照技术规格书严格要求。由于传热管缺陷增长速度与二回路水质有关,因此缺陷增长速率的统计对每一个机组可能都是不一样的,对同一个机组只要二回路水质严格按照技术规格书运行,对不同时期的缺陷增长速度的统计应有一定的代表性,根据俄罗斯 WWER 机组的运行经验,该数值不会超过6%名义壁厚。

为了得到传热管缺陷增长速度在二回路水质严

格按照技术规格书运行的情况下的统计规律,可以预留一部分带有典型特征的“小缺陷”(如缺陷深度 $\leq 30\%$ 壁厚)的传热管继续运行1~2个换料周期,根据用同样涡流检查系统测量的缺陷信号进行比较,可以得到相应缺陷增长速率的统计规律。

7 确定传热管堵管准则的实例

根据上述计算流程,为了更加严格,将涡流检查系统的误差都考虑为正误差,根据文献[2],对于应力腐蚀型裂纹 WWER-1000 蒸汽发生器传热管堵管准则可以确定为 $69\% - 12\% - 6\% = 51\%$ 名义壁厚。但为了更加安全,田湾核电站在1号机组役前检查阶段确定的传热管堵管准则为30%名义壁厚。

参考文献:

- [1] 1998 ASME Boiler and Pressure Vessel Code Section III Division 1—Subsection I NB[S].
- [2] 俄罗斯水压机设计局(OKB Giropress). Deterministic evaluation of heat exchange tubes serviceability for steam generators at tianwan NPP unit 1. technical information[R].
- [3] Regulatory Guide 1.121 Bases for Plugging Degraded PWR Steam Generator Tubes[S].
- [4] PANEG-7-002—1989 俄罗斯联邦核动力容器和管道设计规范[S].

(上接第60页)

的部分区域($-3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$)中的涡流分布图,涡流参考方向如图中箭头所示。

图5和6说明,8字形线圈两翼交点正下方的导体内涡流密度最大,与同等条件下平行放置的线圈相比,8字形线圈激励的涡流密度的最大值随着张角的减小而增大,而且涡流分布集中在线圈两翼所在平面交线下方的狭长区域里,该区域随线圈夹角的增大而减小,这是8字形线圈一个重要特点。在涡流检测中,线圈激励的电流密度越大越有利于提高检测效果,便于检测导体内更深处缺陷,有利于确定缺陷的位置,因此8字形线圈可以有效地用于涡流检测。

4 结论

(1) 导体中的涡流密度分布随线圈张角变化,其峰值出现在线圈交点的正下方。线圈张角越小,涡流密度峰值越大,即8字形线圈有“聚焦”涡流的

作用。利用这种现象,可以提高涡流检测的深度。

(2) 8字形线圈的阻抗增量的模随线圈张角的增大而减小。

(3) 试验验证了半无限大导体平面上方倾斜放置的线圈阻抗增量的解析解是可靠的。

研究期间得到了博士生谢莉和张雯的许多帮助和支持,在此表示感谢。

参考文献:

- [1] Tsaknakis H J, Kriezis E E. Field distribution due to a circular current loop placed in an arbitrary position above a conducting plate[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1985, 23(6): 834—840.
- [2] 雷银照. 时谐电磁场解析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2000: 141—143.
- [3] Jackson J D. Classical Electrodynamics[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 241—242.
- [4] 刘式适, 刘式达. 特殊函数[M]. 第二版. 北京: 气象出版社, 2002: 427—442.